Bloques de Jordan

Objetivos. Estudiar propiedades básicas de un bloque de Jordan. Deducir fórmulas para calcular potencias y polinomios de un bloque de Jordan.

Requisitos. Matrices diagonales, matrices triangulares, fórmula de Taylor.

1. Definición (bloque de Jordan). Sea $\mathbb{F}$ un campo, $\lambda \in \mathbb{F}$, $m \in \{1, 2, \ldots\}$. El *bloque de Jordan* de orden m con entrada diagonal λ se define mediante la siguiente regla:

$$\big(J_m(\lambda)\big)_{i,j} = \begin{cases} \lambda, & j = i; \\ 1, & j = i+1; \\ 0, & j \ne i \quad \text{y} \quad j \ne i+1. \end{cases}$$

Por ejemplo,

$$J_4(\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

2. Observación. Los bloques de Jordan forman una subclase muy especial de *matrices de Toeplitz*, porque el valor de la (i,j)-ésima entrada depende solamente de la diferencia $i-j$.

3. Ejercicio. Calcule las potencias $J_3(\lambda)^p$, $p = 2, 3, 4$.

4. Ejercicio. Calcule las potencias $J_4(\lambda)^p$, $p = 2, 3, 4$.

5. Ejercicio. Calcule las potencias $J_4(0)^p$, $p = 2, 3, 4$.

6. Ejercicio. Exprese el (i,j)-ésimo elemento de la matriz $J_m(0)$ a través del δ-símbolo de Kronecker.

7. Proposición (potencias de un bloque de Jordan con elemento diagonal cero). Se cumple la siguiente fórmula para el (i,j)-ésimo elemento de $J_m(0)^p$:

$$(J_m(0)^p)_{i,j} = \delta_{j-i,p}.$$

8. Ejercicio. Use la descomposición

$$J_m(\lambda) = \lambda I_m + J_m(0)$$

y el teorema del binomio para calcular $J_m(\lambda)^p$. Puede empezar con casos particulares, por ejemplo $m = 4$, $p = 7$.

9. Proposición (polinomio de un bloque de Jordan). Sea $m \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, sea $\lambda \in \mathbb{C}$ y sea $f \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$. Entonces $f(J_m(\lambda))$ es una matriz triangular superior, cuya (i, j)-ésima entrada $(j \geq i)$ es igual a

$$\frac{f^{(j-i)}(\lambda)}{(j-i)!}.$$

Por ejemplo,

$$f(J_4(\lambda)) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f''(\lambda)}{2} & \frac{f'''(\lambda)}{6} \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f''(\lambda)}{2} \\ 0 & 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & f(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Demostración. Apliquemos la fórmula de Taylor al polinomio f y punto λ:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\deg(f)} \frac{f^{(k)}(\lambda)}{k!}(x - \lambda)^k.$$

Sustituimos x por $J_m(\lambda)$:

$$f(J_m(\lambda)) = \sum_{k=0}^{\deg(f)} \frac{f^{(k)}(\lambda)}{k!} J_m(0)^k.$$

Notemos que $J_m(0)^k = 0$ siempre que $k \geq m$. Así que

$$f(J_m(\lambda)) = \sum_{k=0}^{\min(\deg(f), m-1)} \frac{f^{(k)}(\lambda)}{k!} J_m(0)^k. \qquad \square$$

Esta suma es una matriz triangular superior, y su (i, j)-ésima entrada (donde $i \leq j$) es igual a $\frac{f^{(j-i)}(\lambda)}{(j-i)!}$.