El teorema de Jacobi para los menores de esquina

Egor Maximenko

http://www.egormaximenko.com

Seminario "Matrices y operadores"

Escuela Superior de Física y Matemáticas
Instituto Politécnico Nacional
México

2020-09-09

Objetivo:

Demostrar el teorema de Jacobi sobre el menor complementario,
en el caso particular de los menores de esquina:

$$\det\bigl((A^{-1})_{1,\ldots,r}^{1,\ldots,r}\bigr) = \frac{1}{\det(A)}\det\bigl(A_{r+1,\ldots,n}^{r+1,\ldots,n}\bigr).$$

Prerrequisitos:

- el concepto del determinante, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$,
- multiplicación de matrices por bloques,
- el determinante de una matriz triangular por bloques.

1. Repaso de las herramientas
2. Lema sobre el producto de una matriz por su inversa modificada
3. El teorema de Jacobi (en el caso particular, para los menores de esquina)
4. Ejemplo y aplicaciones

Plan

Repaso: multiplicación de matrices por bloques

Proposición

Sean

$$A = \left[\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline G & H \end{array}\right], \qquad B = \left[\begin{array}{c|c} V & W \\ \hline X & Y \end{array}\right].$$

Entonces

$$AB = \left[\begin{array}{c|c} EV + FX & EW + FY \\ \hline GV + HX & GW + HY \end{array}\right].$$

Repaso: multiplicación de matrices por bloques

Proposición

Sean

$$A = \left[\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline G & H \end{array}\right], \qquad B = \left[\begin{array}{c|c} V & W \\ \hline X & Y \end{array}\right].$$

Entonces

$$AB = \left[\begin{array}{c|c} EV + FX & EW + FY \\ \hline GV + HX & GW + HY \end{array}\right].$$

Se supone que las matrices y los bloques son de tamaños compatibles.

Ejercicio: escribir esta suposición de manera formal.

Repaso: multiplicación de matrices por bloques

Otra forma de la misma regla

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{1,\ldots,s}^{1,\ldots,r} & A_{s+1,\ldots,n}^{1,\ldots,r} \\ \hline A_{1,\ldots,s}^{r+1,\ldots,m} & A_{s+1,\ldots,n}^{r+1,\ldots,m} \end{array}\right], \qquad B = \left[\begin{array}{c|c} B_{1,\ldots,t}^{1,\ldots,s} & B_{t+1,\ldots,p}^{1,\ldots,s} \\ \hline B_{1,\ldots,t}^{s+1,\ldots,n} & B_{t+1,\ldots,p}^{s+1,\ldots,n} \end{array}\right].$$

Entonces

$$(AB)_{1,\ldots,t}^{1,\ldots,r} = A_{1,\ldots,s}^{1,\ldots,r} B_{1,\ldots,t}^{1,\ldots,s} + A_{s+1,\ldots,n}^{1,\ldots,r} B_{1,\ldots,t}^{s+1,\ldots,n},$$

$$(AB)_{t+1,\ldots,p}^{1,\ldots,r} = A_{1,\ldots,s}^{1,\ldots,r} B_{t+1,\ldots,p}^{1,\ldots,s} + A_{s+1,\ldots,n}^{1,\ldots,r} B_{t+1,\ldots,p}^{s+1,\ldots,n},$$

$$(AB)_{1,\ldots,t}^{r+1,\ldots,m} = A_{1,\ldots,s}^{r+1,\ldots,m} B_{1,\ldots,t}^{1,\ldots,s} + A_{s+1,\ldots,n}^{r+1,\ldots,m} B_{1,\ldots,t}^{s+1,\ldots,n},$$

$$(AB)_{t+1,\ldots,p}^{r+1,\ldots,m} = A_{1,\ldots,s}^{r+1,\ldots,m} B_{t+1,\ldots,p}^{1,\ldots,s} + A_{s+1,\ldots,n}^{r+1,\ldots,m} B_{t+1,\ldots,p}^{s+1,\ldots,n}.$$

Repaso: el determinante de la matriz triangular superior por bloques

$$\det\left[\begin{array}{ccc|cc} M_1^1 & M_2^1 & M_3^1 & M_4^1 & M_5^1 \\ M_1^2 & M_2^2 & M_3^2 & M_4^2 & M_5^2 \\ M_1^3 & M_2^3 & M_3^3 & M_4^3 & M_5^3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & M_4^4 & M_5^4 \\ 0 & 0 & 0 & M_4^5 & M_5^5 \end{array}\right] = \det\begin{bmatrix} M_1^1 & M_2^1 & M_3^1 \\ M_1^2 & M_2^2 & M_3^2 \\ M_1^3 & M_2^3 & M_3^3 \end{bmatrix} \det\begin{bmatrix} M_4^4 & M_5^4 \\ M_4^5 & M_5^5 \end{bmatrix}.$$

Repaso: el determinante de la matriz triangular superior por bloques

$$\det\left[\begin{array}{ccc|cc} M_1^1 & \boxed{M_2^1} & M_3^1 & M_4^1 & M_5^1 \\ \boxed{M_1^2} & M_2^2 & M_3^2 & M_4^2 & M_5^2 \\ M_1^3 & M_2^3 & \boxed{M_3^3} & M_4^3 & M_5^3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & M_4^4 & \boxed{M_5^4} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{M_4^5} & M_5^5 \end{array}\right] = \det\begin{bmatrix} M_1^1 & \boxed{M_2^1} & M_3^1 \\ \boxed{M_1^2} & M_2^2 & M_3^2 \\ M_1^3 & M_2^3 & \boxed{M_3^3} \end{bmatrix} \det\begin{bmatrix} M_4^4 & \boxed{M_5^4} \\ \boxed{M_4^5} & M_5^5 \end{bmatrix}.$$

Idea: $$\det(M) = \sum_{\varphi\in S_5} \operatorname{sgn}(\varphi)\, M^1_{\varphi(1)} M^2_{\varphi(2)} M^3_{\varphi(3)} M^4_{\varphi(4)} M^5_{\varphi(5)}.$$

En los renglones $4, 5$ podemos restringirnos a columnas $4, 5$ (los demás son 0), por eso en los renglones $1, 2, 3$ nos restringimos a las columnas $1, 2, 3$.

Repaso: el determinante de la matriz triangular superior por bloques

$$\det\left[\begin{array}{c|c} M_{1,\dots,p}^{1,\dots,p} & M_{p+1,\dots,n}^{1,\dots,p} \\ \hline 0_{(n-p)\times p} & M_{p+1,\dots,n}^{p+1,\dots,n} \end{array}\right] = \det\bigl(M_{1,\dots,p}^{1,\dots,p}\bigr)\det\bigl(M_{p+1,\dots,n}^{p+1,\dots,n}\bigr).$$

Idea de demostración:

$$\det(M) = \sum_{\varphi\in S_n} \operatorname{sgn}(\varphi) \prod_{j=1}^{n} M_{\varphi(j)}^{j}.$$

Si $\quad p+1 \le j \le n \quad$ y $\quad 1 \le \varphi(j) \le p, \quad$ entonces $M_{\varphi(j)}^{j} = 0.$

Se quedan las permutaciones de la forma $\quad (\underbrace{\varphi(1),\dots,\varphi(p)}_{\in S_{\{1,\dots,p\}}}, \underbrace{\varphi(p+1),\dots,\varphi(n)}_{\in S_{\{p+1,\dots,n\}}}).$

Plan

1. Repaso de las herramientas
2. Lema sobre el producto de una matriz por su inversa modificada
3. El teorema de Jacobi (en el caso particular, para los menores de esquina)
4. Ejemplo y aplicaciones

Lema (el producto de una matriz por su inversa modificada)

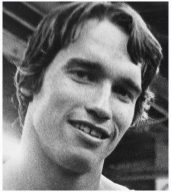
Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $p \in \{1, \ldots, n\}$. Supongamos que A sea invertible. Denotamos A^{-1} por B. Entonces

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} A_{1,\ldots,p}^{1,\ldots,p} & A_{p+1,\ldots,n}^{1,\ldots,p} \\ \hline A_{1,\ldots,p}^{p+1,\ldots,n} & A_{p+1,\ldots,n}^{p+1,\ldots,n} \end{array}\right]}_{A} \left[\begin{array}{c|c} B_{1,\ldots,p}^{1,\ldots,p} & 0_{p\times(n-p)} \\ \hline B_{1,\ldots,p}^{p+1,\ldots,n} & I_{n-p} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_p & A_{p+1,\ldots,n}^{1,\ldots,p} \\ \hline 0_{(n-p)\times p} & A_{p+1,\ldots,n}^{p+1,\ldots,n} \end{array}\right].$$

Lema (el producto de una matriz por su inversa modificada)

Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $p \in \{1, \ldots, n\}$. Supongamos que A sea invertible. Denotamos A^{-1} por B. Entonces

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} A_{1,\ldots,p}^{1,\ldots,p} & A_{p+1,\ldots,n}^{1,\ldots,p} \\ \hline A_{1,\ldots,p}^{p+1,\ldots,n} & A_{p+1,\ldots,n}^{p+1,\ldots,n} \end{array}\right]}_{A} \left[\begin{array}{c|c} B_{1,\ldots,p}^{1,\ldots,p} & 0_{p\times(n-p)} \\ \hline B_{1,\ldots,p}^{p+1,\ldots,n} & I_{n-p} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_p & A_{p+1,\ldots,n}^{1,\ldots,p} \\ \hline 0_{(n-p)\times p} & A_{p+1,\ldots,n}^{p+1,\ldots,n} \end{array}\right].$$

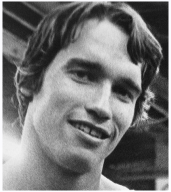


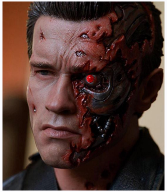
Lema (el producto de una matriz por su inversa modificada)

Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $p \in \{1, \ldots, n\}$. Supongamos que A sea invertible.

Denotamos A^{-1} por B. Entonces

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} A_{1,\ldots,p}^{1,\ldots,p} & A_{p+1,\ldots,n}^{1,\ldots,p} \\ \hline A_{1,\ldots,p}^{p+1,\ldots,n} & A_{p+1,\ldots,n}^{p+1,\ldots,n} \end{array}\right]}_{A} \left[\begin{array}{c|c} B_{1,\ldots,p}^{1,\ldots,p} & 0_{p\times(n-p)} \\ \hline B_{1,\ldots,p}^{p+1,\ldots,n} & I_{n-p} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_p & A_{p+1,\ldots,n}^{1,\ldots,p} \\ \hline 0_{(n-p)\times p} & A_{p+1,\ldots,n}^{p+1,\ldots,n} \end{array}\right].$$





Demostración. Empezamos con la igualdad $AB = I_n$, escrita por bloques:

$$\left[\begin{array}{c|c} A^{1,\ldots,p}_{1,\ldots,p} & A^{1,\ldots,p}_{p+1,\ldots,n} \\ \hline A^{p+1,\ldots,n}_{1,\ldots,p} & A^{p+1,\ldots,n}_{p+1,\ldots,n} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} B^{1,\ldots,p}_{1,\ldots,p} & B^{1,\ldots,p}_{p+1,\ldots,n} \\ \hline B^{p+1,\ldots,n}_{1,\ldots,p} & B^{p+1,\ldots,n}_{p+1,\ldots,n} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_p & 0_{p\times(n-p)} \\ \hline 0_{(n-p)\times p} & I_{n-p} \end{array}\right].$$

Demostración. Empezamos con la igualdad $AB = I_n$, escrita por bloques:

$$\left[\begin{array}{c|c} A^{1,\dots,p}_{1,\dots,p} & A^{1,\dots,p}_{p+1,\dots,n} \\ \hline A^{p+1,\dots,n}_{1,\dots,p} & A^{p+1,\dots,n}_{p+1,\dots,n} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} B^{1,\dots,p}_{1,\dots,p} & B^{1,\dots,p}_{p+1,\dots,n} \\ \hline B^{p+1,\dots,n}_{1,\dots,p} & B^{p+1,\dots,n}_{p+1,\dots,n} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_p & 0_{p\times(n-p)} \\ \hline 0_{(n-p)\times p} & I_{n-p} \end{array}\right].$$

Ahora consideremos el producto que nos interesa:

$$\left[\begin{array}{c|c} A^{1,\dots,p}_{1,\dots,p} & A^{1,\dots,p}_{p+1,\dots,n} \\ \hline A^{p+1,\dots,n}_{1,\dots,p} & A^{p+1,\dots,n}_{p+1,\dots,n} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} B^{1,\dots,p}_{1,\dots,p} & 0_{p\times(n-p)} \\ \hline B^{p+1,\dots,n}_{1,\dots,p} & I_{n-p} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} & \\ \hline & \end{array}\right].$$

Demostración. Empezamos con la igualdad $AB = I_n$, escrita por bloques:

$$\left[\begin{array}{c|c} A^{1,\ldots,p}_{1,\ldots,p} & A^{1,\ldots,p}_{p+1,\ldots,n} \\ \hline A^{p+1,\ldots,n}_{1,\ldots,p} & A^{p+1,\ldots,n}_{p+1,\ldots,n} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} B^{1,\ldots,p}_{1,\ldots,p} & B^{1,\ldots,p}_{p+1,\ldots,n} \\ \hline B^{p+1,\ldots,n}_{1,\ldots,p} & B^{p+1,\ldots,n}_{p+1,\ldots,n} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_p & 0_{p\times(n-p)} \\ \hline 0_{(n-p)\times p} & I_{n-p} \end{array}\right].$$

Ahora consideremos el producto que nos interesa:

$$\left[\begin{array}{c|c} A^{1,\ldots,p}_{1,\ldots,p} & A^{1,\ldots,p}_{p+1,\ldots,n} \\ \hline A^{p+1,\ldots,n}_{1,\ldots,p} & A^{p+1,\ldots,n}_{p+1,\ldots,n} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} B^{1,\ldots,p}_{1,\ldots,p} & 0_{p\times(n-p)} \\ \hline B^{p+1,\ldots,n}_{1,\ldots,p} & I_{n-p} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} & \phantom{0_{p\times(n-p)}} \\ \hline & \phantom{I_{n-p}} \end{array}\right].$$

Dos de sus bloques se calculan como arriba, y los otros de manera directa.

Demostración. Empezamos con la igualdad $AB = I_n$, escrita por bloques:

$$\left[\begin{array}{c|c} A^{1,\ldots,p}_{1,\ldots,p} & A^{1,\ldots,p}_{p+1,\ldots,n} \\ \hline A^{p+1,\ldots,n}_{1,\ldots,p} & A^{p+1,\ldots,n}_{p+1,\ldots,n} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} B^{1,\ldots,p}_{1,\ldots,p} & B^{1,\ldots,p}_{p+1,\ldots,n} \\ \hline B^{p+1,\ldots,n}_{1,\ldots,p} & B^{p+1,\ldots,n}_{p+1,\ldots,n} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_p & 0_{p\times(n-p)} \\ \hline 0_{(n-p)\times p} & I_{n-p} \end{array}\right].$$

Ahora consideremos el producto que nos interesa:

$$\left[\begin{array}{c|c} A^{1,\ldots,p}_{1,\ldots,p} & A^{1,\ldots,p}_{p+1,\ldots,n} \\ \hline A^{p+1,\ldots,n}_{1,\ldots,p} & A^{p+1,\ldots,n}_{p+1,\ldots,n} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} B^{1,\ldots,p}_{1,\ldots,p} & 0_{p\times(n-p)} \\ \hline B^{p+1,\ldots,n}_{1,\ldots,p} & I_{n-p} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_p & \\ \hline & \end{array}\right].$$

Dos de sus bloques se calculan como arriba, y los otros de manera directa.

$$A^{1,\ldots,p}_{1,\ldots,p} B^{1,\ldots,p}_{1,\ldots,p} + A^{1,\ldots,p}_{p+1,\ldots,n} B^{p+1,\ldots,n}_{1,\ldots,p} = I_p.$$

Demostración. Empezamos con la igualdad $AB = I_n$, escrita por bloques:

$$\left[\begin{array}{c|c} A^{1,\ldots,p}_{1,\ldots,p} & A^{1,\ldots,p}_{p+1,\ldots,n} \\ \hline A^{p+1,\ldots,n}_{1,\ldots,p} & A^{p+1,\ldots,n}_{p+1,\ldots,n} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} B^{1,\ldots,p}_{1,\ldots,p} & B^{1,\ldots,p}_{p+1,\ldots,n} \\ \hline B^{p+1,\ldots,n}_{1,\ldots,p} & B^{p+1,\ldots,n}_{p+1,\ldots,n} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_p & 0_{p\times(n-p)} \\ \hline 0_{(n-p)\times p} & I_{n-p} \end{array}\right].$$

Ahora consideremos el producto que nos interesa:

$$\left[\begin{array}{c|c} A^{1,\ldots,p}_{1,\ldots,p} & A^{1,\ldots,p}_{p+1,\ldots,n} \\ \hline A^{p+1,\ldots,n}_{1,\ldots,p} & A^{p+1,\ldots,n}_{p+1,\ldots,n} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} B^{1,\ldots,p}_{1,\ldots,p} & 0_{p\times(n-p)} \\ \hline B^{p+1,\ldots,n}_{1,\ldots,p} & I_{n-p} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_p & \\ \hline 0_{(n-p)\times p} & \end{array}\right].$$

Dos de sus bloques se calculan como arriba, y los otros de manera directa.

$$A^{p+1,\ldots,n}_{1,\ldots,p} B^{1,\ldots,p}_{1,\ldots,p} + A^{p+1,\ldots,n}_{p+1,\ldots,n} B^{p+1,\ldots,n}_{p+1,\ldots,n} = 0_{(n-p)\times p}.$$

Demostración. Empezamos con la igualdad $AB = I_n$, escrita por bloques:

$$\left[\begin{array}{c|c} A^{1,\dots,p}_{1,\dots,p} & A^{1,\dots,p}_{p+1,\dots,n} \\ \hline A^{p+1,\dots,n}_{1,\dots,p} & A^{p+1,\dots,n}_{p+1,\dots,n} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} B^{1,\dots,p}_{1,\dots,p} & B^{1,\dots,p}_{p+1,\dots,n} \\ \hline B^{p+1,\dots,n}_{1,\dots,p} & B^{p+1,\dots,n}_{p+1,\dots,n} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_p & 0_{p\times(n-p)} \\ \hline 0_{(n-p)\times p} & I_{n-p} \end{array}\right].$$

Ahora consideremos el producto que nos interesa:

$$\left[\begin{array}{c|c} A^{1,\dots,p}_{1,\dots,p} & A^{1,\dots,p}_{p+1,\dots,n} \\ \hline A^{p+1,\dots,n}_{1,\dots,p} & A^{p+1,\dots,n}_{p+1,\dots,n} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} B^{1,\dots,p}_{1,\dots,p} & 0_{p\times(n-p)} \\ \hline B^{p+1,\dots,n}_{1,\dots,p} & I_{n-p} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_p & A^{1,\dots,p}_{p+1,\dots,n} \\ \hline 0_{(n-p)\times p} & \end{array}\right].$$

Dos de sus bloques se calculan como arriba, y los otros de manera directa.

$$A^{1,\dots,p}_{1,\dots,p}\, 0_{p\times(n-p)} + A^{1,\dots,p}_{p+1,\dots,n}\, I_{n-p} = A^{1,\dots,p}_{p+1,\dots,n}.$$

Demostración. Empezamos con la igualdad $AB = I_n$, escrita por bloques:

$$\left[\begin{array}{c|c} A^{1,\dots,p}_{1,\dots,p} & A^{1,\dots,p}_{p+1,\dots,n} \\ \hline A^{p+1,\dots,n}_{1,\dots,p} & A^{p+1,\dots,n}_{p+1,\dots,n} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} B^{1,\dots,p}_{1,\dots,p} & B^{1,\dots,p}_{p+1,\dots,n} \\ \hline B^{p+1,\dots,n}_{1,\dots,p} & B^{p+1,\dots,n}_{p+1,\dots,n} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_p & 0_{p\times(n-p)} \\ \hline 0_{(n-p)\times p} & I_{n-p} \end{array}\right].$$

Ahora consideremos el producto que nos interesa:

$$\left[\begin{array}{c|c} A^{1,\dots,p}_{1,\dots,p} & A^{1,\dots,p}_{p+1,\dots,n} \\ \hline A^{p+1,\dots,n}_{1,\dots,p} & A^{p+1,\dots,n}_{p+1,\dots,n} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} B^{1,\dots,p}_{1,\dots,p} & 0_{p\times(n-p)} \\ \hline B^{p+1,\dots,n}_{1,\dots,p} & I_{n-p} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_p & A^{1,\dots,p}_{p+1,\dots,n} \\ \hline 0_{(n-p)\times p} & A^{p+1,\dots,n}_{p+1,\dots,n} \end{array}\right].$$

Dos de sus bloques se calculan como arriba, y los otros de manera directa.

$$A^{p+1,\dots,n}_{1,\dots,p}\, 0_{p\times(n-p)} + A^{p+1,\dots,n}_{p+1,\dots,n}\, I_{n-p} = A^{p+1,\dots,n}_{p+1,\dots,n}.$$

Demostración. Empezamos con la igualdad $AB = I_n$, escrita por bloques:

$$\left[\begin{array}{c|c} A^{1,\ldots,p}_{1,\ldots,p} & A^{1,\ldots,p}_{p+1,\ldots,n} \\ \hline A^{p+1,\ldots,n}_{1,\ldots,p} & A^{p+1,\ldots,n}_{p+1,\ldots,n} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} B^{1,\ldots,p}_{1,\ldots,p} & B^{1,\ldots,p}_{p+1,\ldots,n} \\ \hline B^{p+1,\ldots,n}_{1,\ldots,p} & B^{p+1,\ldots,n}_{p+1,\ldots,n} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_p & 0_{p\times(n-p)} \\ \hline 0_{(n-p)\times p} & I_{n-p} \end{array}\right].$$

Ahora consideremos el producto que nos interesa:

$$\left[\begin{array}{c|c} A^{1,\ldots,p}_{1,\ldots,p} & A^{1,\ldots,p}_{p+1,\ldots,n} \\ \hline A^{p+1,\ldots,n}_{1,\ldots,p} & A^{p+1,\ldots,n}_{p+1,\ldots,n} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} B^{1,\ldots,p}_{1,\ldots,p} & 0_{p\times(n-p)} \\ \hline B^{p+1,\ldots,n}_{1,\ldots,p} & I_{n-p} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_p & A^{1,\ldots,p}_{p+1,\ldots,n} \\ \hline 0_{(n-p)\times p} & A^{p+1,\ldots,n}_{p+1,\ldots,n} \end{array}\right].$$

Dos de sus bloques se calculan como arriba, y los otros de manera directa. $\square$

Plan

Recordamos el resultado del lema, luego aplicamos det a ambos lados:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} A^{1,\ldots,p}_{1,\ldots,p} & A^{1,\ldots,p}_{p+1,\ldots,n} \\ \hline A^{p+1,\ldots,n}_{1,\ldots,p} & A^{p+1,\ldots,n}_{p+1,\ldots,n} \end{array}\right]}_{A} \left[\begin{array}{c|c} B^{1,\ldots,p}_{1,\ldots,p} & 0_{p\times(n-p)} \\ \hline B^{p+1,\ldots,n}_{1,\ldots,p} & I_{n-p} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_p & A^{1,\ldots,p}_{p+1,\ldots,n} \\ \hline 0_{(n-p)\times p} & A^{p+1,\ldots,n}_{p+1,\ldots,n} \end{array}\right],$$

Recordamos el resultado del lema, luego aplicamos det a ambos lados:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} A^{1,\dots,p}_{1,\dots,p} & A^{1,\dots,p}_{p+1,\dots,n} \\ \hline A^{p+1,\dots,n}_{1,\dots,p} & A^{p+1,\dots,n}_{p+1,\dots,n} \end{array}\right]}_{A} \left[\begin{array}{c|c} B^{1,\dots,p}_{1,\dots,p} & 0_{p\times(n-p)} \\ \hline B^{p+1,\dots,n}_{1,\dots,p} & I_{n-p} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_p & A^{1,\dots,p}_{p+1,\dots,n} \\ \hline 0_{(n-p)\times p} & A^{p+1,\dots,n}_{p+1,\dots,n} \end{array}\right],$$

$$\det(A)\det\left(B^{1,\dots,p}_{1,\dots,p}\right) = \det\left(A^{p+1,\dots,n}_{p+1,\dots,n}\right).$$

Teorema de Jacobi para los menores de esquina

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz invertible y sea $p \in \{1,\dots,n\}$. Entonces

$$\det\left((A^{-1})^{1,\dots,p}_{1,\dots,p}\right) = \frac{1}{\det(A)}\det(A^{p+1,\dots,n}_{p+1,\dots,n}).$$

Teorema de Jacobi para los menores de esquina

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \boxed{(A^{-1})^{1,\ldots,p}_{1,\ldots,p}} & (A^{-1})^{1,\ldots,p}_{p+1,\ldots,n} \\ \hline (A^{-1})^{p+1,\ldots,n}_{1,\ldots,p} & (A^{-1})^{p+1,\ldots,n}_{p+1,\ldots,n} \end{array}\right], \qquad A = \left[\begin{array}{c|c} A^{1,\ldots,p}_{1,\ldots,p} & A^{1,\ldots,p}_{p+1,\ldots,n} \\ \hline A^{p+1,\ldots,n}_{1,\ldots,p} & \boxed{A^{p+1,\ldots,n}_{p+1,\ldots,n}} \end{array}\right].$$

$$\det\big((A^{-1})^{1,\ldots,p}_{1,\ldots,p}\big) = \frac{1}{\det(A)} \det(A^{p+1,\ldots,n}_{p+1,\ldots,n}).$$

Teorema de Jacobi para los menores de esquina

Mostramos a los personajes de manera más explícita ($n = 5$, $p = 2$):

$$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} B_1^1 & B_2^1 & B_3^1 & B_4^1 & B_5^1 \\ B_1^2 & B_2^2 & B_3^2 & B_4^2 & B_5^2 \\ B_1^3 & B_2^3 & B_3^3 & B_4^3 & B_5^3 \\ B_1^4 & B_2^4 & B_3^4 & B_4^4 & B_5^4 \\ B_1^5 & B_2^5 & B_3^5 & B_4^5 & B_5^5 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 & A_4^1 & A_5^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 & A_4^2 & A_5^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 & A_4^3 & A_5^3 \\ A_1^4 & A_2^4 & A_3^4 & A_4^4 & A_5^4 \\ A_1^5 & A_2^5 & A_3^5 & A_4^5 & A_5^5 \end{bmatrix}.$$

Teorema de Jacobi para los menores de esquina

Mostramos a los personajes de manera más explícita ($n = 5$, $p = 2$):

$$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} B_1^1 & B_2^1 & B_3^1 & B_4^1 & B_5^1 \\ B_1^2 & B_2^2 & B_3^2 & B_4^2 & B_5^2 \\ B_1^3 & B_2^3 & B_3^3 & B_4^3 & B_5^3 \\ B_1^4 & B_2^4 & B_3^4 & B_4^4 & B_5^4 \\ B_1^5 & B_2^5 & B_3^5 & B_4^5 & B_5^5 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 & A_4^1 & A_5^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 & A_4^2 & A_5^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 & A_4^3 & A_5^3 \\ A_1^4 & A_2^4 & A_3^4 & A_4^4 & A_5^4 \\ A_1^5 & A_2^5 & A_3^5 & A_4^5 & A_5^5 \end{bmatrix}.$$

$$\det \begin{bmatrix} B_1^1 & B_2^1 \\ B_1^2 & B_2^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A_3^3 & A_4^3 & A_5^3 \\ A_3^4 & A_4^4 & A_5^4 \\ A_3^5 & A_4^5 & A_5^5 \end{bmatrix}.$$

Plan

Un ejemplo con series de potencias, mutualmente recíprocas

$$(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots)\,(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots) = 1.$$

Un ejemplo con series de potencias, mutualmente recíprocas

$$(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots)\,(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots) = 1.$$

$$a_0 b_0 = 1, \qquad a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0, \qquad a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0, \qquad \dots$$

Un ejemplo con series de potencias, mutualmente recíprocas

$$(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots)(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots) = 1.$$

$$a_0 b_0 = 1, \qquad a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0, \qquad a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0, \qquad \ldots$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \\ b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicaciones que veremos en un futuro

- La fórmula de Nägelsbach–Kostka (la fórmula dual de Jacobi–Trudi) para los polinomios de Schur sesgados.
- Una expresión para los menores de las matrices de Toeplitz:
  Per Alexandersson (2012),
  Egor Maximenko y Mario Alberto Moctezuma Salazar (2017).