Matriz de Gram

Objetivos. Definir la *matriz de Gram* de una lista de vectores en un espacio con producto interno. Conocer sus propiedades básicas.

Requisitos. Espacios con producto interno, listas ortogonales y ortonormales de vectores, bases ortonormales, matriz adjunta.

1. Definición (matriz de Gram de una lista de vectores en un espacio con producto interno). Sean V un espacio vectorial con producto interno, $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_m)$ una lista de vectores en V. La *matriz de Gram* de la lista $\mathcal{A}$ es la matriz de todos los productos internos de los vectores de esta lista:

$$G(a_1, \ldots, a_n) := \big[\langle a_i, a_j \rangle\big]_{i,j=1}^{m}.$$

2. Ejemplo. En el espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} f(x) g(x)\, dx$$

consideremos la lista de los monomios e_0, e_1, e_2:

$$e_0(x) = 1, \qquad e_1(x) = x, \qquad e_2(x) = x^2.$$

Calculemos todos los productos internos:

$$\begin{array}{lll} \langle e_0, e_0 \rangle = 1, & \langle e_0, e_1 \rangle = 0, & \langle e_0, e_2 \rangle = \dfrac{1}{3}, \\ \langle e_1, e_0 \rangle = 0, & \langle e_1, e_1 \rangle = \dfrac{1}{3}, & \langle e_1, e_2 \rangle = 0, \\ \langle e_2, e_0 \rangle = \dfrac{1}{3}, & \langle e_2, e_1 \rangle = 0, & \langle e_2, e_2 \rangle = \dfrac{1}{5}. \end{array}$$

De allí

$$G(e_0, e_1, e_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

3. Ejercicio. En el caso real, la matriz de Gram es simétrica:

$$G(a_1, \ldots, a_m)^\top = G(a_1, \ldots, a_m).$$

4. Ejercicio. En el caso complejo, la matriz de Gram es hermitiana (en otras palabras, autoadjunta), es decir,

$$\overline{G(a_1, \ldots, a_m)^\top} = G(a_1, \ldots, a_m).$$

5. Observación. Una lista de vectores es ortogonal $\iff$ su matriz de Gram es diagonal.

6. Observación. Una lista de vectores es ortonormal $\iff$ su matriz de Gram es la matriz identidad.

7. Proposición (cálculo de la matriz de Gram en el caso de dimensión finita). Sean V un EV de dimensión finita n, $\mathcal{B}$ una base ortonormal de V, $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_m)$ una lista de vectores en V. Denotemos por C a la matriz de la lista $\mathcal{A}$ respecto la base $\mathcal{B}$:

$$C = \mathcal{A}_{\mathcal{B}} = \big[(a_1)_{\mathcal{B}}, \ldots, (a_m)_{\mathcal{B}}\big],$$

así que la j-ésima columna de C consta de las coordenadas del vector a_j con respecto a la base $\mathcal{B}$:

$$a_j = \sum_{i=1}^{n} C_{i,j} b_i.$$

Entonces

$$G(\mathcal{A}) = C^* C,$$

donde C^* es la matriz adjunta (transpuesta conjugada) de la matriz C.

8. Ejemplo. En el espacio $\mathbb{R}^4$ consideremos la lista de vectores

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

En este caso la matriz de la lista $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$ es

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix},$$

y la matriz de Gram es

$$G(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 11 & -22 \\ 11 & 14 & -1 \\ -22 & -1 & 61 \end{bmatrix}.$$

9. Proposición (rango de la matriz de Gram). Sean V un EV de dimensión finita n, $\mathcal{B}$ una base ortonormal de V, $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_m)$ una lista de vectores en V. Denotemos por $C = \mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ a la matriz de la lista $\mathcal{A}$ en la base $\mathcal{B}$. Entonces

$$\mathrm{r}(G(a_1, \ldots, a_m)) = \mathrm{r}(C).$$

10. Tarea adicional. Demuestre el teorema después de estudiar la ortogonalización de Gram-Schmidt (véase las siguientes clases).

11. Proposición (matriz de Gram y volumen de un paralelepípedo). Sea V un espacio vectorial real con producto interno, $\dim(V) = n$, y sea $a_1, \ldots, a_n$ una lista de vectores en V. Entonces

$$\det G(a_1, \ldots, a_n) = x^2,$$

donde x es el volumen del paralelepípedo generado por $a_1, \ldots, a_n$.

Demostración. Sea $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ una base ortonormal en V. Denotemos por C a la matriz de la lista $a_1, \ldots, a_n$ en la base $\mathcal{B}$. Entonces $\det(C)$ es el volumen orientado del paralelepípedo generado por $a_1, \ldots, a_n$, y $x = |\det(A)|$. De allí

$$\det G(a_1, \ldots, a_n) = \det(C^\top C) = \det(C)^2 = x^2. \qquad \square$$