Comprobar la solución de sistemas de ecuaciones con ayuda de GNU Octave

Objetivos. Aprender a usar GNU Octave para comprobar la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Requisitos. GNU Octave instalado, operaciones con matrices en GNU Octave, operaciones elementales por renglones, solución de sistemas de ecuaciones lineales, matriz inversa.

1. Solución de sistemas cuadradas consistentes determinados. Abra el intérprete de GNU Octave y ejecute los siguientes comandos uno por uno:

```
A = [2 7 -5; 5 -4 3; -1 6 -2]
rank(A)
b = [-12; 38; -17]
x = A \ b
A * x
```

Resumen: en el caso de sistemas cuadrados consistentes determinados, GNU Octave nos puede dar la solución con el comando `A \ b`.

2. Crear matrices aleatorias en GNU Octave (repaso).

```
rand(4, 2)
randi([-7 7], 2, 3)
```

El comando `randi` funciona en versiones nuevas de GNU Octave. Si este comando no está definido, entonces puede ser útil el comando `rand` con el redondeo:

```
round(14 * rand(2, 3) - 7)
```

3. Juntar dos matrices en GNU Octave.

```
A = randi([-9, -1], 2, 4);
B = randi([3, 9], 2, 3);
C = [A B];
E = randi([11 20], 2, 3);
F = randi([0 9], 4, 3);
G = [E; F];
```

4. Matriz aumentada y reducción (el caso de un sistema consistente determinado). El comando `rref` regresa la forma escalonada reducida (*reduced row echelon form*) de la matriz dada:

```
C = [1 -2 3; 3 -6 5]
rref(C)
```

Podemos usar este comando para resolver sistemas:

```
A = [2 7 -5; 5 -4 3; -1 6 -2]
b = [-12; 38; -17]
Aext = [A b]
rref(Aext)
```

5. Solución de un sistema consistente indeterminado. El comando `rref` es más útil en el caso de sistemas indeterminados. Por ejemplo, con ayuda de GNU Octave resolvamos el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} -3x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & 4x_5 & = & 12; \\ x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & -6; \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & 4x_4 & + & 2x_5 & = & -8. \end{array}\right.$$

Formamos la matriz aumentada y la reducimos con el comando `rref`:

```
A = [-3 4 -1 2 4; 1 -1 -2 -1 -1; -1 2 -5 4 2]
b = [12; -6; -8]
Aext = [A b]
R = rref(Aext)
```

Obtenemos la matriz escalonada reducida

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -9 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & -7 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

Las variables libres son x_3 y x_5. Escribimos la solución general y una solución particular (con $x_3 = 1$, $x_5 = 2$):

$$\text{Conjunto solución} = \left\{ \begin{bmatrix} 9x_3 - 16 \\ 7x_3 - x_5 - 8 \\ x_3 \\ -2 \\ x_5 \end{bmatrix} : \quad x_3, x_5 \in \mathbb{R} \right\}, \qquad x_{\text{part}} = \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Comprobamos la solución particular:

```
solpart =  [-7; -3; 1; -2; 2]
A * solpart
b
```

Comprobar la solución por pasos (con operaciones elementales)

6. Operaciones con variables.

```
a = 10; b = 3;
[a b]
a *= 5  # en MATLAB hay que escribir a = a * 5
[a b]
a += 2 * b   # en MATLAB hay que escribir a = a + 2 * b
[a b]
c = [11 12 13; 14 15 16; 17 18 19]
c([3 1])
```

7. Operaciones elementales.

```
A = randi([-7 7], 3, 5)
A(2, :) *= 2
A([2 3], :) = A([3 2], :)
A(2, :) += 3 * A(1, :)
```

8. Reducción por medio de operaciones elementales en GNU Octave.

```
A = [-3 4 -1 2 4; 1 -1 -2 -1 -1; -1 2 -5 4 2]
b = [12; -6; -8]
C = [A b]
C([1 2], :) = C([2 1], :)
C(2, :) += 3 * C(1, :)
C(3, :) += C(1, :)
```

Termine la solución.

9. Comprobación del rango. Mostremos uno de los errores más peligrosos que puede surgir al resolver sistemas de ecuaciones lineales manualmente:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 8 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \mathrel{+}= -R_1]{R_2 \mathrel{+}= 2R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1 \mathrel{+}= 2R_2]{R_3 \mathrel{+}= -R_2}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 13 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \mathrel{*}= -1/10} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 13 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \mathrel{+}= -5R_3]{R_1 \mathrel{+}= -13R_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

La última matriz es escalonada reducida, pero está calculada mal. Al observar la última matriz uno llega a la conclusión falsa que el rango del sistema es 3, el sistema es consistente determinado, y su única solución es el vector

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Este vector *es* una solución particular del sistema, por eso *la comprobación no nos permite detectar el error*. Pero en realidad el rango del sistema es 2, el sistema es consistente indeterminado y su conjunto solución es infinito. Los siguientes comandos permiten calcular bien el rango del sistema y detectar el error cometido arriba:

```
A = [1 -2 3; -2 5 -1; 1 -1 8]
rank(A)
```