Regla de Cramer

Objetivos. Demostrar la regla de Cramer que permite resolver sistemas cuadradas de ecuaciones lineales usando determinantes.

Requisitos. Determinantes y sus propiedades: las propiedades polilineal y alternante del determinante o la matriz adjunta clásica, expresión de la matriz inversa a través de la matriz adjunta clásica y expansión del determinante por cofactores.

1. Teorema (regla de Cramer, fue publicada en 1748 por Colin MacLaurin e independientemente en 1750 por Gabriel Cramer). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz cuadrada con determinante no nulo y sea $b \in \mathbb{F}^n$. Entonces el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ tiene una solución única, y las componentes de x se pueden calcular mediante la siguiente fórmula:

$$x_k = \frac{\det(C_k)}{\det(A)} \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}), \tag{1}$$

donde la matriz C_k se obtiene de la matriz A al reemplazar su k-ésima columna por el vector b.

Antes de demostrar el teorema veremos con un ejemplo cómo funciona la fórmula (1).

2. Ejemplo. Resolver el sistema de ecuaciones lineales con la regla de Cramer. Hacer la comprobación.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & 5x_2 & = & 1; \\ -x_1 & + & 2x_2 & = & 7. \end{array} \right.$$

Solución. Primero calculamos el determinante del sistema:

$$\Delta = \det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 11.$$

El determinante es no nulo, por lo tanto el sistema tiene una solución única y se puede aplicar la regla de Cramer. Calculamos los determinantes de las matrices C_1 y C_2 y las componentes del vector solución:

$$\Delta_1 = \det(C_1) = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -33; \qquad x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{33}{11} = -3;$$

$$\Delta_2 = \det(C_2) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = 22; \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{22}{11} = 2.$$

Respuesta:

$$x = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Comprobación:

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9+10 \\ 3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}. \qquad \checkmark \qquad \square$$

Veremos dos demostraciones de la regla de Cramer.

Demostración de la regla de Cramer basada en las propiedades polilineal y alternante del determinante

Demostración. Ya sabemos que la hipótesis $\det(A) \neq 0$ implica la invertibilidad de A. Por eso la ecuación $Ax = b$ es equivalente a la ecuación $x = A^{-1}b$. Con este razonamiento hemos demostrado la existencia y unicidad de la solución. Falta demostrar la fórmula (1).

Supongamos que x es una solución de la ecuación $Ax = b$. Entonces b es la siguiente combinación lineal de las columnas de A:

$$b = \sum_{j=1}^{n} x_j A_{*,j}.$$

Por otro lado, la matriz C_k se escribe de la siguiente manera:

$$C_k = \Big[A_{*,1}, A_{*,2}, \ldots, \underbrace{b}_{\substack{k\text{-ésima} \\ \text{columna}}}, \ldots, A_{*,n}\Big].$$

La idea principal es usar el hecho que el determinante es lineal respecto a la k-ésima columna de la matriz. Más fórmalmente, trabajaremos con la función $\operatorname{Det}\colon (\mathbb{F}^n)^n \to \mathbb{F}$ que a cada n vectores del espacio $\mathbb{F}^n$ asocia el determinante de la matriz formada por estos vectores (como renglones o como columnas, no importa). Ya hemos visto la función es polilineal; en particular, es lineal respecto al k-ésimo argumento:

$$\begin{aligned}
\det(C_k) &= \operatorname{Det}(A_{*,1}, A_{*,2}, \ldots, b, \ldots, A_{*,n}) \\
&= \operatorname{Det}(A_{*,1}, A_{*,2}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} x_j A_{*,j}, \ldots, A_{*,n}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \operatorname{Det}(A_{*,1}, A_{*,2}, \ldots, A_{*,j}, \ldots, A_{*,n}).
\end{aligned}$$

Consideremos el j-ésimo sumando de la última suma. Si $j \neq k$, entonces la columna $A_{*,j}$ se repite dos veces y por la propiedad alternante Det se anula. Por eso se queda solamente el sumando correspondiente a $j = k$:

$$\det(C_k) = x_k \operatorname{Det}(A_{*,1}, A_{*,2}, \ldots, A_{*,k}, \ldots, A_{*,n}) = x_k \det(A).$$

Otra vez aplicando la hipótesis $\det(A) \neq 0$ y despejando x_k obtenemos (1). $\square$

Demostración de la regla de Cramer usando la matriz adjunta clásica

En estos apuntes la entrada (i, j) de la matriz A se denota por $A_{i,j}$, y para el cofactor correspondiente se usa la notación $\widehat{A}_{i,j}$. La (i, j)-ésima entrada de la matriz C_k se puede escribir como

$$(C_k)_{i,j} \coloneqq \begin{cases} A_{i,j}, & j \neq k; \\ b_i, & j = k. \end{cases}$$

3. Ejercicio para comprender la demostración de la regla de Cramer. Consideremos una matriz general $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{F})$ y un vector general $b \in \mathbb{F}^3$. Denotemos por C_2 a la matriz que se obtiene de la matriz A al sustituir su segunda columna por la columna b:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix}, \qquad C_2 = \begin{bmatrix} A_{1,1} & b_1 & A_{1,3} \\ A_{2,1} & b_2 & A_{2,3} \\ A_{3,1} & b_3 & A_{3,3} \end{bmatrix}.$$

De manera similar podríamos formar las matrices C_1 y C_3 sustituyendo por b la primera y la tercera columna de A, respectivamente. Escriba una fórmula para las entradas de la segunda columna de C_2:

$$\forall i \in \{1, 2, 3\} \qquad (C_2)_{i,2} = ?.$$

Escriba una fórmula para las entradas de la primera y tercera columna de C_2:

$$\forall i \in \{1, 2, 3\} \qquad \forall j \in \{1, 3\} \qquad (C_2)_{i,j} = ?.$$

Calcule los cofactores de las entradas de la segunda columna de las matrices A y C_2:

$$\widehat{A}_{1,2} = ? \qquad \widehat{A}_{2,2} = ? \qquad \widehat{A}_{3,2} = ?$$

$$\widehat{(C_2)}_{1,2} = ? \qquad \widehat{(C_2)}_{2,2} = ? \qquad \widehat{(C_2)}_{3,2} = ?$$

Compare los resultados y haga una conclusión (escriba una fórmula). Expanda el determinante de la matriz C_2 por cofactores a lo largo de la segunda columna y muestre que dicho determinante se expresa en términos de los elementos b_1, b_2, b_3 y de los cofactores $\widehat{A}_{1,2}$, $\widehat{A}_{2,2}$ y $\widehat{A}_{3,2}$ de la matriz A.

Demostración de la regla de Cramer. Como $\det(A) \neq 0$, la matriz A es invertible. Por lo tanto, el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ tiene una única solución $x = A^{-1}b$. Vamos a demostrar la fórmula (1). Sabemos que la matriz inversa A^{-1} se expresa a través de los cofactores de A:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{\det(A)} \left[\widehat{A}_{j,i}\right]_{i,j=1}^{n}.$$

Calculemos la k-ésima componente de x:

$$x_k = \sum_{j=1}^{n} (A^{-1})_{k,j} b_j = \frac{1}{\det(A)} \sum_{j=1}^{n} b_j \widehat{A}_{j,k}.$$

Por otro lado, notemos que todas las columnas de la matriz C_k excepto la k-ésima coinciden con las columnas correspondientes de la matriz A. Por eso los cofactores de las entradas de la k-ésima columna de C_k coinciden con los cofactores de las entradas correspondientes de la matriz A:

$$\widehat{(C_k)}_{j,k} = \widehat{A}_{j,k}.$$

Además, $b_j = (C_k)_{j,k}$. De aquí

$$x_k = \frac{1}{\det(A)} \sum_{j=1}^{n} (C_k)_{j,k} \widehat{(C_k)}_{j,k}.$$

La última suma es la expansión del determinante $\det(C_k)$ por cofactores a lo largo la k-ésima columna. Obtenemos la fórmula requerida:

$$x_k = \frac{\det(C_k)}{\det(A)}. \qquad \square$$

4. Otro ejemplo. Resolver el sistema de ecuaciones lineales usando la regla de Cramer. Hacer la comprobación.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 3; \\ 4x_1 & + & 7x_2 & + & 6x_3 & = & 8; \\ -2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 1. \end{array} \right.$$

La regla de Cramer es cómoda para $n = 2$, pero para $n \geq 3$ necesita demasiadas operaciones aritméticas; la eliminación de Gauss y otros métodos son más eficientes. No obstante, la regla de Cramer tiene varias aplicaciones teóricas.

5. Tarea adicional: una aplicación teórica de la regla de Cramer. Supongamos que las entradas de la matriz A y las componentes del vector b son algunas funciones continuas de una variable real:

$$A(t) = \big[A_{i,j}(t)\big]_{i,j=1}^{n}, \qquad b(t) = \big[b_j(t)\big]_{j=1}^{n}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Además supongamos que $\det A(t) \neq 0$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Denotemos por $x(t)$ el vector solución del sistema correspondiente:

$$x(t) = \big[x_j(t)\big]_{j=1}^{n} = (A(t))^{-1} b(t).$$

Demuestre que las funciones $x_1, \ldots, x_n$ son continuas.