Sumas de las raíces de la unidad

Objetivos. Deducir fórmulas para sumas de potencias de las raíces de la unidad.

Requisitos. Raíces de la unidad, suma de la progresión geométrica.

Raíces de la unidad (repaso)

En todos los ejercicios se supone que $n \in \{1, 2, \ldots\}$. Usamos la notación

$$\omega_n \coloneqq \mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{n}\,\mathrm{i}}.$$

1. ¿Cuándo $\omega_n^k = 1$? Recuerde el criterio:

$$\omega_n^k = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$$

2. Criterio de la igualdad de potencias de ω_n. Para cualesquiera $m, k \in \mathbb{Z}$,

$$\omega_n^m = \omega_n^k \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}$$

3. Congruencia e igualdad, $n = 5$. Sean $p, q \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Encuentre cotas precisas para la diferencia $p - q$:

$$\underbrace{\qquad}_{?} \le p - q \le \underbrace{\qquad}_{?}$$

Seguimos suponiendo que $p, q \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. ¿Cuándo puede suceder que p y q son congruentes modulo 5?.

$$5 \mid (p - q) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

4. Congruencia e igualdad. Sean $p, q \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Encuentre cotas precisas para la diferencia $p - q$:

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?} \le p - q \le \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}$$

Seguimos suponiendo que $p, q \in \{0, \ldots, n - 1\}$. ¿Cuándo puede suceder que p y q son congruentes modulo n?.

$$n \mid (p - q) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

5. Conjunto solución de la ecuación $z^5 = 1$. Usando la notación ω_5 escriba el conjunto solución de la ecuación $z^5 = 1$:

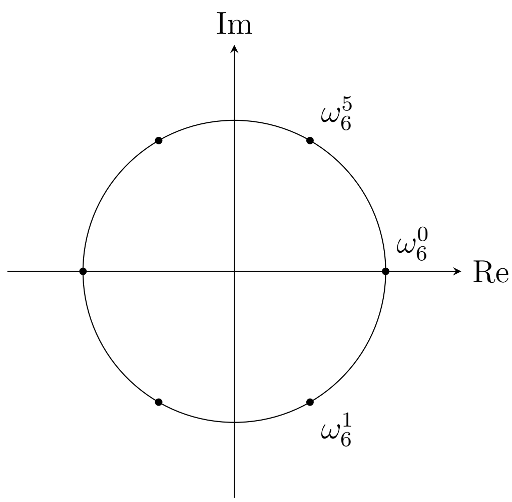
$$\{z \in \mathbb{C}: \ z^5 = 1\} =$$

6. Conjunto solución de la ecuación $z^n = 1$. Usando la notación ω_n escriba el conjunto solución de la ecuación $z^n = 1$:

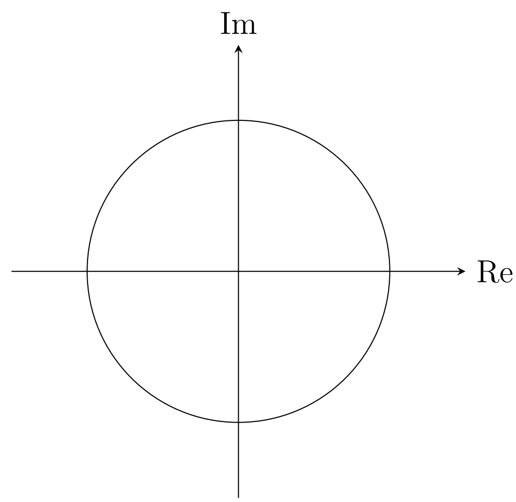
$$\{z \in \mathbb{C}: \ z^n = 1\} =$$

7. Ubicación de las raíces de la unidad en la circunferencia unitaria. Para cada uno de los números $n = 6$ y $n = 5$ marque en el plano complejo las raíces de la ecuación $z^n = 1$.

$\boxed{n = 6}$



$\boxed{n = 5}$



Suma de la progresión geométrica (repaso)

8. Hacia la fórmula de la suma de la progresión geométrica, ejemplo con tres sumandos. Sea $q \in \mathbb{C}$. Calcule el siguiente producto:

$$(1-q)(1+q+q^2).$$

Solución.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & q & + & q^2 & & & & \\ & - & q & - & q^2 & - & q^3 & = & \underbrace{\qquad\qquad}_{?} \end{array}$$

□

9. Hacia la fórmula de la suma de la progresión geométrica, ejemplo con cuatro sumandos. Sea $q \in \mathbb{C}$. Calcule el siguiente producto:

$$(1-q)(1+q+q^2+q^3) =$$

10. Hacia la fórmula de la suma de la progresión geométrica. Sea $q \in \mathbb{C}$. Calcule el siguiente producto:

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n-1} q^k = (1-q)(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}) =$$

11. Suma parcial de la progresión geométrica, caso $q \neq 1$. Sea $q \neq 1$. Calcule la siguiente suma:

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k =$$

12. Suma parcial de la progresión geométrica, caso $q = 1$. Sea $q = 1$. Calcule la siguiente suma:

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k =$$

13. Resumen: suma parcial de la progresión geométrica. Sea $q \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \begin{cases} \qquad\qquad\qquad , & \text{si} \quad q \neq 1; \\ \qquad\qquad\qquad , & \text{si} \quad q = 1. \end{cases}$$

Sumas de las raíces de la unidad

En esta subsección se supone que $n \in \{2, 3, \ldots\}$. El caso $n = 1$ es trivial y se excluye.

14. Suma de todas las raíces de la unidad. Calcule la suma:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^k =$$

15. Suma de las potencias de las raíces de la unidad, primer caso. Sea $m \in \mathbb{Z}$ tal que $n \mid m$. Calcule la suma:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{km} =$$

16. Suma de las potencias de las raíces de la unidad, segundo caso. Sea $m \in \mathbb{Z}$ tal que $n \nmid m$. Calcule la suma:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{km} =$$

17. Suma de las potencias de las raíces de la unidad. Sea $m \in \mathbb{Z}$. Calcule la suma:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{km} = \begin{cases} \qquad\qquad, & \text{si} \\ \qquad\qquad, & \text{si} \end{cases}$$

18. "Ortogonalidad" de las raíces de la unidad. Sean $p, q \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Calcule la siguiente suma en el caso $p \neq q$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{pk} \omega_n^{-qk} =$$

Calcule también la suma:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{pk} \omega_n^{-pk} =$$

19. Resumen: "ortogonalidad" de las raíces de la unidad.
Sean $p, q \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Escriba la fórmula general usando la delta de Kronecker:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{pk} \omega_n^{-qk} = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$$

20. Comprobación numérica. Hagamos una comprobación en el lenguaje de MATLAB (se pueden usar sus análogos libres GNU Octave, Scilab y FreeMat):

```
n = 6
omega = exp(2 * pi * i / n)
omega ^ n
indices = (0 : (n - 1))'
ru = omega .^ indices
sum(ru)
sum(ru .^ 2)
sum(ru .^ 12)
```