Raíces de la unidad

Objetivos. Estudiar las *raíces de la unidad* (soluciones complejas de la ecuación $z^n = 1$) y establecer sus propiedades básicas.

Requisitos. Forma polar de números complejos, fórmula de Euler, fórmula de Moivre, progresión geométrica.

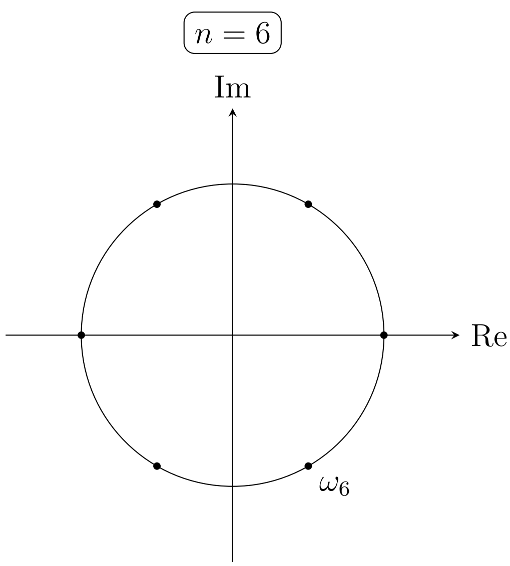
En todos los siguientes ejercicios se supone que $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

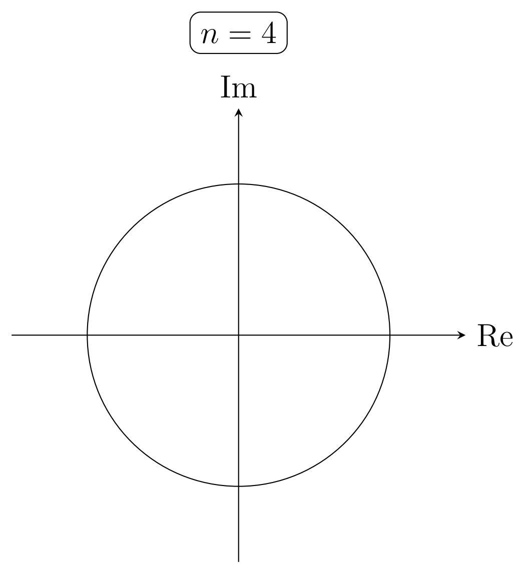
Notación: $\boldsymbol{\omega_n}$.

$$\omega_n \coloneqq \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}}.$$

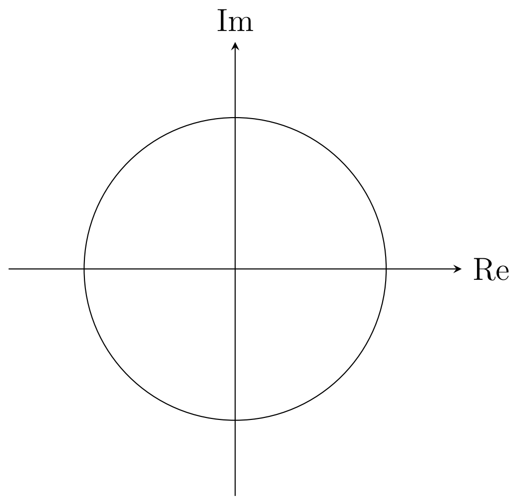
1. Valor absoluto de $\boldsymbol{\omega_n}$. Recuerde el valor de $|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\,|$, donde $\theta \in \mathbb{R}$. Calcule $|\omega_n|$.

2. Ejemplos. Para cada uno de los números $n = 6, 4, 3, 8$ divida la circunferencia unitaria en n partes iguales (empezando con el ángulo cero) e indique el número ω_n.

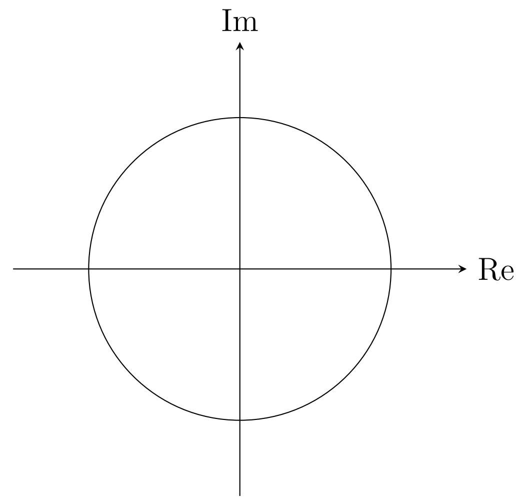




$\boxed{n = 3}$



$\boxed{n = 8}$



Definición: un número real divide a otro. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Decimos que α *divide* a β y escribimos $\alpha \mid \beta$ si existe un número entero k tal que $\beta = k\alpha$:

$$\alpha \mid \beta \qquad \overset{\text{def}}{\iff} \qquad \exists k \in \mathbb{Z} \quad \beta = k\alpha.$$

Notación: $\boldsymbol{\alpha}\mathbb{Z}$. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Se denota por $\alpha\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros que son múltiplos de α:

$$\alpha\mathbb{Z} := \big\{\beta \in \mathbb{R}\colon \quad \alpha \mid \beta\big\} = \big\{\beta \in \mathbb{R}\colon \quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad \beta = k\alpha\big\}.$$

3. Ejemplos. Escriba los conjuntos $\alpha\mathbb{Z}$:

$$\sqrt{3}\,\mathbb{Z} = \big\{\ldots,\ -3\sqrt{3},\ -2\sqrt{3},\ -\sqrt{3},\ 0,\ \sqrt{3},\ 2\sqrt{3},\ 3\sqrt{3},\ \ldots\big\},$$

$$7\,\mathbb{Z} =$$

$$\frac{\pi}{2}\,\mathbb{Z} =$$

$$2\pi\,\mathbb{Z} =$$

Proposición (sin demostración). Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Entonces

$$e^{i\theta} = 1 \qquad \iff \qquad 2\pi \mid \theta \qquad \iff \qquad \theta \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

4. Teorema (criterio de que $\boldsymbol{\omega_n^k = 1}$). Determine qué condición es necesaria y suficiente para que $\omega_n^k = 1$:

$$\omega_n^k = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{e}^{\overbrace{\qquad\qquad}^{?}} = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad\qquad\qquad \ldots$$

Resumen:

$$\boxed{\quad \omega_n^k = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad\qquad\qquad\qquad }$$

5. ¿Cuándo $\boldsymbol{\omega_n = 1}$?. Determine para qué valores de n ($n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$) el número ω_n es igual a 1.

6. $\boldsymbol{n}$-ésima potencia de $\boldsymbol{\omega_n}$. Calcule:

$$\omega_n^n = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

7. Criterio de la igualdad de potencias de $\boldsymbol{\omega_n}$. Sean $m, k \in \mathbb{Z}$. Demuestre que

$$\omega_n^m = \omega_n^k \qquad \Longleftrightarrow \qquad m - k \in n\mathbb{Z}.$$

8. Lema (sin demostración). Sea $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Compare $|m|$ con 1 (elija la relación correcta entre las siguientes: $<$, $>$, $=$, $\leq$, $\geq$):

$$|m| \quad \underbrace{\qquad}_{?} \quad 1.$$

9. Lema. Sea $k \in n\,\mathbb{Z}$. Demuestre que si $k \neq 0$, entonces $|k| \geq n$.

10. Lema. Sea $k \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq k < n$. Encuentre cotas para el número $-k$:

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{?} < -k \leq \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

11. Lema. Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, la desigualdad $|a| < b$ es equivalente a la siguiente desigualdad doble:

$$|a| < b \qquad \Longleftrightarrow$$

12. Lema. Sean $j, k \in \mathbb{Z}$ tales que $0 \leq j, k < n$. Demuestre que $|j - k| < n$.

13. Lema. Sean $j, k \in \mathbb{Z}$ tales que

$$0 \leq j < n, \qquad 0 \leq k < n \qquad \text{y} \qquad j - k \in n\,\mathbb{Z}.$$

Demuestre que $j = k$.

14. Teorema: las primeras $\boldsymbol{n}$ potencias de $\boldsymbol{\omega_n}$ son distintas. Demuestre que los números ω_n^k, donde $k \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq k < n$, son distintos.

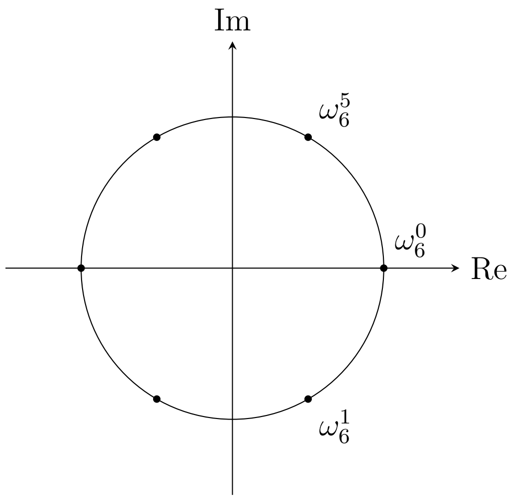
15. Lema: si $z^n = 1$, entonces $|z| = 1$. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^n = 1$. Demuestre que $|z| = 1$.

16. Teorema: las raíces de la ecuación $z^n = 1$ son de la forma ω_n^k con $k \in \mathbb{Z}$. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^n = 1$. Demuestre que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $z = \omega_n^k$. Sugerencia: busque z en forma polar.

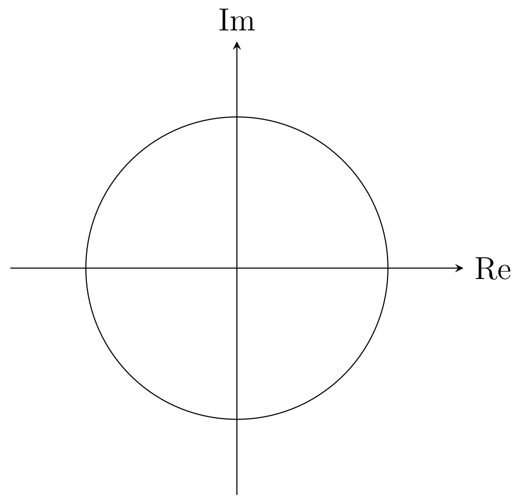
17. Teorema: descripción del conjunto solución de la ecuación $z^n = 1$. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $z^n = 1$?
Escriba estas soluciones usando la notación ω_n.

18. Ubicación de las raíces de la unidad en la circunferencia unitaria. Para cada uno de los números $n = 6, 4, 3, 8$ marque en el plano complejo las raíces de la ecuación $z^n = 1$.

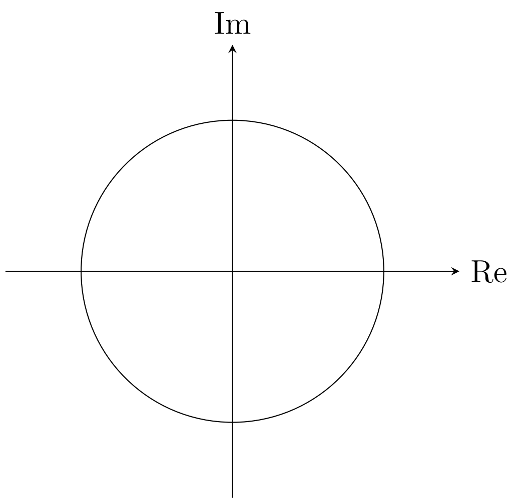
$\boxed{n = 6}$



$\boxed{n = 4}$



$\boxed{n = 3}$



$\boxed{n = 8}$