

La transformada cuántica de Fourier

Juan Carlos Jiménez Cervantes,
Egor Maximenko, Eliseo Sarmiento Rosales

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

18 de julio de 2025

Objetivo

La transformada cuántica de Fourier es un circuito cuántico que realiza un análogo de la transformada finita de Fourier F_d para $d = 2^n$, trabajando con n cubits.

Vamos a construir este circuito para $n = 3$, es decir, $d = 8$.

Prerrequisitos

- Raíces de la unidad y sus propiedades.
- Transformada finita de Fourier.
- El producto de Kronecker de vectores.
- Compuertas cuánticas.



Michael A. Nielsen, Isaac L. Chuang (2010):
Quantum Computation and Quantum Information.
Cambridge University Press.

- 1 La transformada finita de Fourier (repaso)
- 2 Descomposiciones auxiliares
- 3 Descomposición de la transformada finita de Fourier
- 4 Algunas compuertas cuánticas (repaso)
- 5 Circuito de la transformada cuántica de Fourier

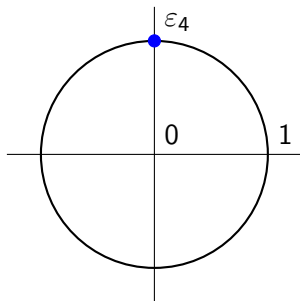
Plan

- 1 La transformada finita de Fourier (repaso)
- 2 Descomposiciones auxiliares
- 3 Descomposición de la transformada finita de Fourier
- 4 Algunas compuertas cuánticas (repaso)
- 5 Circuito de la transformada cuántica de Fourier

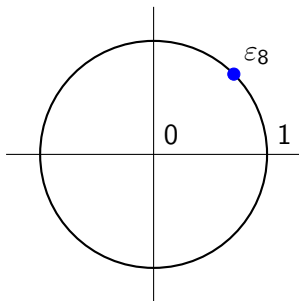
El número ε_d

$$\varepsilon_d := e^{\frac{2\pi i}{d}}.$$

$$n = 2, d = 2^n = 4$$



$$n = 3, d = 2^3 = 8$$



La matriz de Fourier

$$F_d = \frac{1}{\sqrt{d}} \left[\varepsilon_d^{jk} \right]_{j,k=0}^{d-1}.$$

$$F_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} \varepsilon_4^0 & \varepsilon_4^0 & \varepsilon_4^0 & \varepsilon_4^0 \\ \varepsilon_4^0 & \varepsilon_4^1 & \varepsilon_4^2 & \varepsilon_4^3 \\ \varepsilon_4^0 & \varepsilon_4^2 & \varepsilon_4^4 & \varepsilon_4^6 \\ \varepsilon_4^0 & \varepsilon_4^3 & \varepsilon_4^6 & \varepsilon_4^9 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}.$$

La matriz F_d es unitaria: $F_d^\dagger F_d = I_n$.

Otras modificaciones de la matriz de Fourier

En métodos numéricos, es común usar otra versión de la matriz de Fourier:

$$\left[\varepsilon_d^{-jk} \right]_{j,k=0}^{d-1}.$$

Esta versión no es unitaria.

En el cómputo cuántico, siempre se usa una versión unitaria, con el coeficiente $\frac{1}{\sqrt{d}}$.

Además, nosotros ponemos la potencia ε_d^{jk} , en vez de ε_d^{-jk} .

Esto no importa mucho.

La transformada finita de Fourier

Es la transformación lineal asociada a la matriz F_d :

$$\mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^d, \quad x \mapsto F_d x.$$

$$(F_d x)_j = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=0}^{d-1} \varepsilon_d^{jk} x_k.$$

En la computación cuántica, es incómodo pensar de esta manera.

Vamos a suponer que $d = 2^n$ y aplicar F_d a los vectores de la base canónica.

Vectores de la base canónica

Para $n = 2$ y $d = 2^n = 4$, los vectores de la base canónica son

$$|00\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |01\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |10\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |11\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Multiplicar la matriz de Fourier por los vectores básicos

$$F_4 |10\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} \varepsilon_4^0 & \varepsilon_4^0 & \varepsilon_4^0 & \varepsilon_4^0 \\ \varepsilon_4^0 & \varepsilon_4^1 & \varepsilon_4^2 & \varepsilon_4^3 \\ \varepsilon_4^0 & \varepsilon_4^2 & \varepsilon_4^4 & \varepsilon_4^6 \\ \varepsilon_4^0 & \varepsilon_4^3 & \varepsilon_4^6 & \varepsilon_4^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \varepsilon_4^0 \\ \varepsilon_4^2 \\ \varepsilon_4^4 \\ \varepsilon_4^6 \end{bmatrix}.$$

Descomponemos el vector obtenido en la misma base canónica:

$$F_4 |10\rangle = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_4^0 |00\rangle + \varepsilon_4^2 |01\rangle + \varepsilon_4^4 |10\rangle + \varepsilon_4^6 |11\rangle \right).$$

Los coeficientes son las componentes de la segunda columna de la matriz F_4 (contando desde 0).

La transformada finita de Fourier aplicada a los vectores básicos

$$F_d |j\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=0}^{d-1} \varepsilon_d^{jk} |k\rangle .$$

El k -ésimo coeficiente de la combinación lineal, $\frac{1}{\sqrt{d}} \varepsilon_d^{jk}$,
es la componente (k, j) de la matriz F_d .

Plan

- 1 La transformada finita de Fourier (repaso)
- 2 Descomposiciones auxiliares**
- 3 Descomposición de la transformada finita de Fourier
- 4 Algunas compuertas cuánticas (repaso)
- 5 Circuito de la transformada cuántica de Fourier

Números en el sistema binario

j_1	j_2	j_3	$f(j_1, j_2, j_3)$ $= 4j_1 + 2j_2 + j_3$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	2
0	1	1	3
1	0	0	4
1	0	1	5
1	1	0	6
1	1	1	7

$$f: \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1, \dots, 7\},$$

$$f: (j_1, j_2, j_3) \mapsto 4j_1 + 2j_2 + j_3.$$

Teorema

f es una biyección.

Descomposiciones de sumas

Sabemos que la siguiente función es una biyección:

$$f: \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1, \dots, 7\}, \quad f(k_1, k_2, k_3) := 4k_1 + 2k_2 + k_3.$$

Descomposiciones de sumas

Sabemos que la siguiente función es una biyección:

$$f: \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1, \dots, 7\}, \quad f(k_1, k_2, k_3) := 4k_1 + 2k_2 + k_3.$$

Podemos usar esta función f como un cambio de variable en alguna suma:

$$\sum_{k=0}^7 \alpha_k$$

Descomposiciones de sumas

Sabemos que la siguiente función es una biyección:

$$f: \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1, \dots, 7\}, \quad f(k_1, k_2, k_3) := 4k_1 + 2k_2 + k_3.$$

Podemos usar esta función f como un cambio de variable en alguna suma:

$$\sum_{k=0}^7 \alpha_k =$$

Descomposiciones de sumas

Sabemos que la siguiente función es una biyección:

$$f: \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1, \dots, 7\}, \quad f(k_1, k_2, k_3) := 4k_1 + 2k_2 + k_3.$$

Podemos usar esta función f como un cambio de variable en alguna suma:

$$\sum_{k=0}^7 \alpha_k = \sum_{(k_1, k_2, k_3) \in \{0, 1\}^3} \alpha_{4k_1 + 2k_2 + k_3}$$

Descomposiciones de sumas

Sabemos que la siguiente función es una biyección:

$$f: \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1, \dots, 7\}, \quad f(k_1, k_2, k_3) := 4k_1 + 2k_2 + k_3.$$

Podemos usar esta función f como un cambio de variable en alguna suma:

$$\sum_{k=0}^7 \alpha_k = \sum_{(k_1, k_2, k_3) \in \{0, 1\}^3} \alpha_{4k_1 + 2k_2 + k_3} =$$

Descomposiciones de sumas

Sabemos que la siguiente función es una biyección:

$$f: \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1, \dots, 7\}, \quad f(k_1, k_2, k_3) := 4k_1 + 2k_2 + k_3.$$

Podemos usar esta función f como un cambio de variable en alguna suma:

$$\sum_{k=0}^7 \alpha_k = \sum_{(k_1, k_2, k_3) \in \{0, 1\}^3} \alpha_{4k_1 + 2k_2 + k_3} = \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 \sum_{k_3=0}^1 \alpha_{4k_1 + 2k_2 + k_3}.$$

El producto de Kronecker de dos vectores

(en la notación usual de álgebra lineal)

Dados $a = [a_j]_{j=0}^{p-1} \in \mathbb{C}^p$, $b = [b_k]_{k=0}^{q-1} \in \mathbb{C}^q$,

$$(a \otimes b)_{qj+k} := a_j b_k \quad (0 \leq j < p, 0 \leq k < q).$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 b_0 \\ a_0 b_1 \\ a_1 b_0 \\ a_1 b_1 \\ a_2 b_0 \\ a_2 b_1 \end{bmatrix}.$$

La propiedad bilineal del producto de Kronecker

Si $|a\rangle, |b\rangle \in \mathbb{C}^m$, $|c\rangle, |d\rangle \in \mathbb{C}^n$, $\xi, \eta, \sigma, \tau \in \mathbb{C}$,

$$(\xi |a\rangle + \eta |b\rangle) \otimes |c\rangle = \xi(|a\rangle \otimes |c\rangle) + \eta(|b\rangle \otimes |c\rangle),$$

$$|a\rangle \otimes (\sigma |c\rangle + \tau |d\rangle) = \sigma(|a\rangle \otimes |c\rangle) + \tau(|a\rangle \otimes |d\rangle).$$

Descomposición de los vectores de la base canónica

Para $n = 2$ y $d = 2^n = 4$,

$$|00\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |0\rangle \otimes |0\rangle, \quad |01\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |0\rangle \otimes |1\rangle,$$

$$|10\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |1\rangle \otimes |0\rangle, \quad |11\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |1\rangle \otimes |1\rangle.$$

El producto tensorial de tres estados mixtos

(usamos la propiedad 3-lineal)

Para $n = 3$ y $d = 2^3 = 8$,

$$\begin{aligned} & \left(\alpha_{1,0} |0\rangle + \alpha_{1,1} |1\rangle \right) \otimes \left(\alpha_{2,0} |0\rangle + \alpha_{2,1} |1\rangle \right) \otimes \left(\alpha_{3,0} |0\rangle + \alpha_{3,1} |1\rangle \right) \\ &= \alpha_{1,0} \alpha_{2,0} \alpha_{3,0} |000\rangle + \alpha_{1,0} \alpha_{2,0} \alpha_{3,1} |001\rangle \\ &+ \alpha_{1,0} \alpha_{2,1} \alpha_{3,0} |010\rangle + \alpha_{1,0} \alpha_{2,1} \alpha_{3,1} |011\rangle \\ &+ \alpha_{1,1} \alpha_{2,0} \alpha_{3,0} |100\rangle + \alpha_{1,1} \alpha_{2,0} \alpha_{3,1} |101\rangle \\ &+ \alpha_{1,1} \alpha_{2,1} \alpha_{3,0} |110\rangle + \alpha_{1,1} \alpha_{2,1} \alpha_{3,1} |111\rangle . \end{aligned}$$

El producto tensorial de tres estados mixtos

(usamos la propiedad 3-lineal)

Para $n = 3$ y $d = 2^3 = 8$,

$$\begin{aligned} & \left(\alpha_{1,0} |0\rangle + \alpha_{1,1} |1\rangle \right) \otimes \left(\alpha_{2,0} |0\rangle + \alpha_{2,1} |1\rangle \right) \otimes \left(\alpha_{3,0} |0\rangle + \alpha_{3,1} |1\rangle \right) \\ &= \alpha_{1,0} \alpha_{2,0} \alpha_{3,0} |000\rangle + \alpha_{1,0} \alpha_{2,0} \alpha_{3,1} |001\rangle \\ &+ \alpha_{1,0} \alpha_{2,1} \alpha_{3,0} |010\rangle + \alpha_{1,0} \alpha_{2,1} \alpha_{3,1} |011\rangle \\ &+ \alpha_{1,1} \alpha_{2,0} \alpha_{3,0} |100\rangle + \alpha_{1,1} \alpha_{2,0} \alpha_{3,1} |101\rangle \\ &+ \alpha_{1,1} \alpha_{2,1} \alpha_{3,0} |110\rangle + \alpha_{1,1} \alpha_{2,1} \alpha_{3,1} |111\rangle . \end{aligned}$$

Nota: no todos elementos de $\mathbb{C}^8$ son de esta forma.

El producto tensorial de n estados mixtos

(usamos la propiedad polilineal)

Para n general y $d = 2^n$,

$$\begin{aligned}\bigotimes_{q=1}^n \left(\alpha_{q,0} |0\rangle + \alpha_{q,1} |1\rangle \right) &= \sum_{k=0}^{d-1} \left(\prod_{p=1}^n \alpha_{p,k_p} \right) |k\rangle \\ &= \sum_{k_1=0}^1 \cdots \sum_{k_n=0}^1 \left(\prod_{p=1}^n \alpha_{p,k_p} \right) |k_1 \dots k_p\rangle.\end{aligned}$$

Regla de simplificación para ε_{mq}^{mp}

Para cualesquiera p en $\mathbb{N}$, q en $\mathbb{Z}$, m en $\mathbb{N}$,

$$\varepsilon_{mq}^{mp} = \exp\left(\frac{2\pi i \, mq}{mp}\right) = \exp\left(\frac{2\pi i \, q}{p}\right) = \varepsilon_q^p.$$

Por ejemplo,

$$\varepsilon_8^2 = \varepsilon_4, \quad \varepsilon_{16}^{12} = \varepsilon_4^3.$$

Descomposición de las potencias de ε_d

Por ejemplo, si $j = 4j_1 + 2j_2 + j_3$,

$$\varepsilon_8^{2j} = \varepsilon_8^{8j_1} \varepsilon_8^{4j_2} \varepsilon_8^{2j_3} = \varepsilon_2^{j_2} \varepsilon_4^{j_3},$$

$$\varepsilon_8^{4j} = \varepsilon_2^j = \varepsilon_2^{4j_1} \varepsilon_2^{2j_2} \varepsilon_2^{j_3} = \varepsilon_2^{j_3}.$$

Plan

- 1 La transformada finita de Fourier (repaso)
- 2 Descomposiciones auxiliares
- 3 Descomposición de la transformada finita de Fourier**
- 4 Algunas compuertas cuánticas (repaso)
- 5 Circuito de la transformada cuántica de Fourier

Descomposición de $F_{2^n} |j\rangle$

Teorema

Sean $n \in \mathbb{N}$, $d = 2^n$, $j_1, \dots, j_n \in \{0, 1\}$. Entonces,

$$F_d |j_1 \dots j_n\rangle = \bigotimes_{p=1}^n \frac{|0\rangle + \left(\prod_{q=p}^n \varepsilon_{2^{q+1-p}}^{j_q} \right) |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Por ejemplo, para $n = 3$,

$$F_8 |j\rangle = \frac{|0\rangle + \varepsilon_2^{j_3} |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle + \varepsilon_2^{j_2} \varepsilon_4^{j_3} |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle + \varepsilon_2^{j_1} \varepsilon_4^{j_2} \varepsilon_8^{j_3} |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Otra forma equivalente

$$F_8 |j\rangle = \frac{|0\rangle + \varepsilon_2^{j_3} |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle + \varepsilon_2^{j_2} \varepsilon_4^{j_3} |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle + \varepsilon_2^{j_1} \varepsilon_4^{j_2} \varepsilon_8^{j_3} |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

$$F_8 |j\rangle = \frac{|0\rangle + e^{2\pi i \cdot 0.j_3} |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle + e^{2\pi i \cdot 0.j_2 j_3} |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle + e^{2\pi i \cdot 0.j_1 j_2 j_3} |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

En esta forma, se utilizan fracciones binarias:

$$0.j_3 = \frac{j_3}{2}, \quad 0.j_2 j_3 = \frac{j_2}{2} + \frac{j_3}{4}, \quad 0.j_1 j_2 j_3 = \frac{j_1}{2} + \frac{j_2}{4} + \frac{j_3}{8}.$$

Demostración, inicio

$$\begin{aligned} F_8 |j\rangle &= \frac{1}{\sqrt{8}} \sum_{k=0}^7 \varepsilon_8^{jk} |k\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{8}} \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 \sum_{k_3=0}^1 \varepsilon_8^{j(4k_1+2k_2+k_3)} |k_1 k_2 k_3\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{8}} \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 \sum_{k_3=0}^1 \varepsilon_8^{4jk_1} \varepsilon_8^{2jk_2} \varepsilon_8^{jk_3} |k_1\rangle \otimes |k_2\rangle \otimes |k_3\rangle \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k_1=0}^1 \varepsilon_8^{4jk_1} |k_1\rangle \right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k_2=0}^1 \varepsilon_8^{2jk_2} |k_2\rangle \right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k_3=0}^1 \varepsilon_8^{jk_3} |k_3\rangle \right). \end{aligned}$$

Demostración, final

$$\begin{aligned}
 F_8 |j\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k_1=0}^1 \varepsilon_8^{4jk_1} |k_1\rangle \right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k_2=0}^1 \varepsilon_8^{2jk_2} |k_2\rangle \right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k_3=0}^1 \varepsilon_8^{jk_3} |k_3\rangle \right) \\
 &= \frac{|0\rangle + \varepsilon_2^j |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle + \varepsilon_4^j |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle + \varepsilon_8^j |1\rangle}{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{|0\rangle + \varepsilon_2^{4j_1} \varepsilon_2^{2j_2} \varepsilon_2^{j_3} |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle + \varepsilon_4^{4j_1} \varepsilon_4^{2j_2} \varepsilon_4^{j_3} |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle + \varepsilon_8^{4j_1} \varepsilon_8^{2j_2} \varepsilon_8^{j_3} |1\rangle}{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{|0\rangle + \varepsilon_2^{j_3} |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle + \varepsilon_2^{j_2} \varepsilon_4^{j_3} |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle + \varepsilon_2^{j_1} \varepsilon_4^{j_2} \varepsilon_8^{j_3} |1\rangle}{\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

Hemos mostrado que $F_8 |j\rangle$ se descompone en operaciones más simples:

$$F_8 |j\rangle = \frac{|0\rangle + \epsilon_2^{j_3} |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle + \epsilon_2^{j_2} \epsilon_4^{j_3} |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle + \epsilon_2^{j_1} \epsilon_4^{j_2} \epsilon_8^{j_3} |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

En lo que sigue, mostraremos que estas operaciones se pueden realizar por medio de algunas compuertas cuánticas “elementales”.

Plan

- 1 La transformada finita de Fourier (repaso)
- 2 Descomposiciones auxiliares
- 3 Descomposición de la transformada finita de Fourier
- 4 Algunas compuertas cuánticas (repaso)**
- 5 Circuito de la transformada cuántica de Fourier

La compuerta de Hadamard

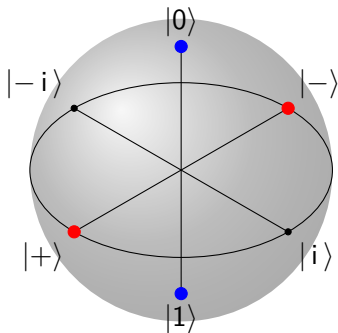
$$H := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} = |+\rangle,$$

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} = |-\rangle.$$

$$H|s\rangle = \frac{|0\rangle + (-1)^s |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

El sentido geométrico de la compuerta de Hadamard en la esfera de Bloch



$$H|0\rangle = |+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}},$$

$$H|1\rangle = |-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}},$$

$$H|s\rangle = \frac{|0\rangle + (-1)^s |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

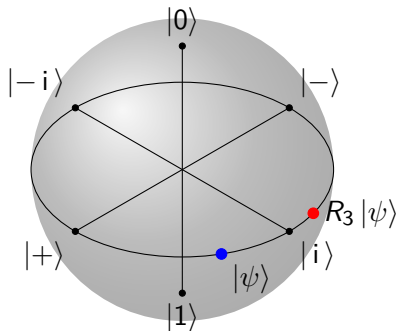
La compuerta R_p , donde $p \in \mathbb{N}$

$$R_p := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{2^p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i}{2^p}} \end{bmatrix}.$$

$$R_p |0\rangle = |0\rangle, \quad R_p |1\rangle = \varepsilon_{2^p} |1\rangle.$$

$$R_p \frac{|0\rangle + e^{i\varphi} |1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|0\rangle + e^{i(\varphi + \frac{2\pi}{2^p})} |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

El sentido geométrico de R_3 en la esfera de Bloch



$$|\psi\rangle = \frac{|0\rangle + e^{i\varphi} |1\rangle}{\sqrt{2}},$$

$$R_3 |\psi\rangle = \frac{|0\rangle + e^{i(\varphi + \frac{\pi}{4})} |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

$C_{12}R_p$ (R_p controlado)

$$C_{12}R_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{2^p} \end{bmatrix}$$

$$C_{12}R_p |00\rangle = |00\rangle,$$

$$C_{12}R_p |01\rangle = |01\rangle,$$

$$C_{12}R_p |10\rangle = |10\rangle,$$

$$C_{12}R_p |11\rangle = \varepsilon_{2^p} |11\rangle.$$

Teorema

Para cada j_1 en $\{0, 1\}$ y cada ξ, η en $\mathbb{C}$,

$$C_{12}R_p \left(|j_1\rangle \otimes (\xi |0\rangle + \eta |1\rangle) \right) = |j_1\rangle \otimes (\xi |0\rangle + \eta \varepsilon_{2^p}^{j_1} |1\rangle).$$

Demostración

$$|f\rangle := C_{12}R_p \left(|j_1\rangle \otimes \left(\xi |0\rangle + \eta |1\rangle \right) \right) = \xi C_{12}R_p |j_1 0\rangle + \eta C_{12}R_p |j_1 1\rangle .$$

Tenemos dos casos:

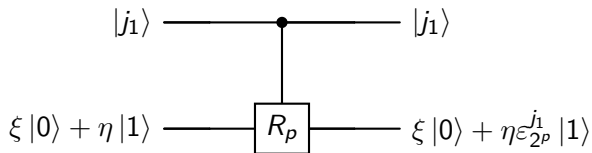
$$|f\rangle = \begin{cases} \xi |00\rangle + \eta |01\rangle , & j_1 = 0; \\ \xi |10\rangle + \eta \varepsilon_{2^p} |11\rangle , & j_1 = 1. \end{cases}$$

Finalmente, unimos estos dos casos:

$$|f\rangle = \xi |j_1 0\rangle + \eta \varepsilon_{2^p}^{j_1} |j_1 1\rangle = |j_1\rangle \otimes \left(\xi |0\rangle + \eta \varepsilon_{2^p} |1\rangle \right).$$

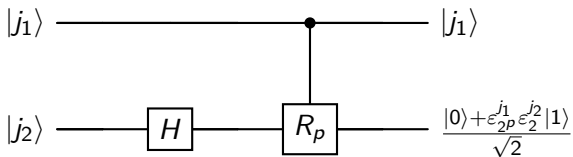
$C_{12}R_p$

$$C_{12}R_p \left(|j_1\rangle \otimes (\xi |0\rangle + \eta |1\rangle) \right) = |j_1\rangle \otimes (\xi |0\rangle + \eta \varepsilon_{2^p}^{j_1} |1\rangle).$$



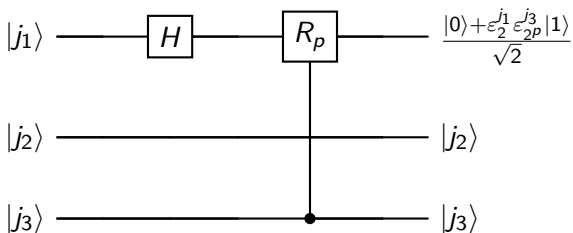
$C_{12}R_p$ después de $I \otimes H$

$$C_{12}R_p (I \otimes H) (|j_1\rangle \otimes |j_2\rangle) = |j_1\rangle \otimes \frac{|0\rangle + \epsilon_{2p}^{j_1} \epsilon_2^{j_2} |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$



$C_{31}R_p$ después de $H \otimes I \otimes I$

$$C_{31}R_p (H \otimes I \otimes I) |j_1 j_2 j_3\rangle = \frac{|0\rangle + \epsilon_2^{j_1} \epsilon_{2^p}^{j_3} |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |j_2\rangle \otimes |j_3\rangle .$$

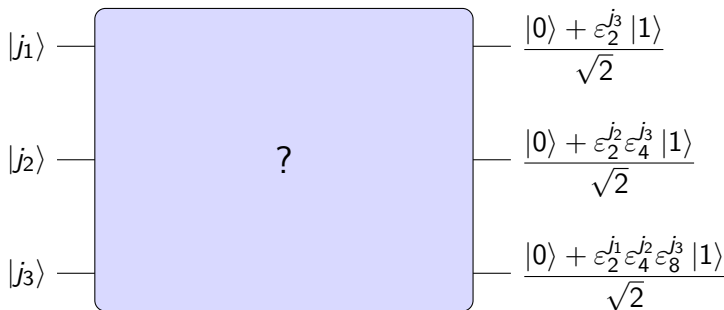


Plan

- 1 La transformada finita de Fourier (repaso)
- 2 Descomposiciones auxiliares
- 3 Descomposición de la transformada finita de Fourier
- 4 Algunas compuertas cuánticas (repaso)
- 5 Circuito de la transformada cuántica de Fourier

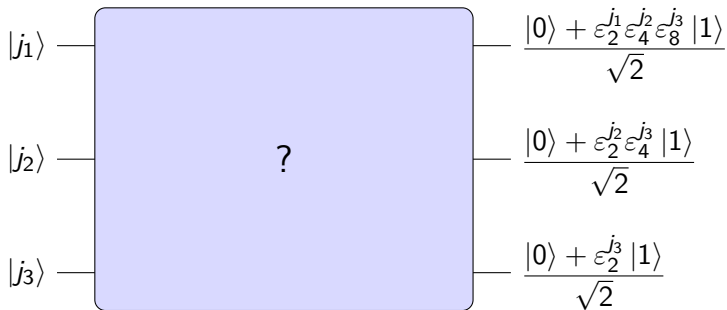
Buscamos un circuito que haga la siguiente transformación

$$|j_1 j_2 j_3\rangle \mapsto \frac{|0\rangle + \varepsilon_2^{j_3} |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle + \varepsilon_2^{j_2} \varepsilon_4^{j_3} |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle + \varepsilon_2^{j_1} \varepsilon_4^{j_2} \varepsilon_8^{j_3} |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

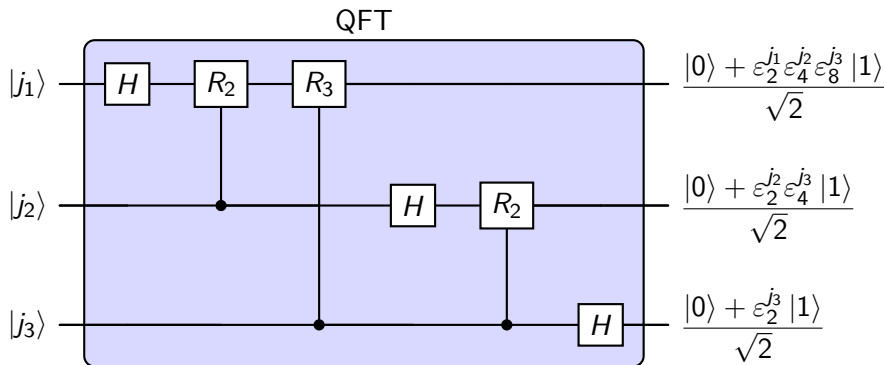


Buscamos un circuito que haga la siguiente transformación

Mejor, cambiamos el orden de las salidas.



El circuito de la transformada cuántica de Fourier para $n = 3$



El número de las compuertas cuánticas en el circuito “transformada cuántica de Fourier”

Para $n = 3$, tenemos 6 compuertas cuánticas:

$$3 + 2 + 1 = 6.$$

Para n general, el número de las compuertas cuánticas es

$$n + (n - 1) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n + 1)}{2} \approx \frac{1}{2}(\log_2 d)^2.$$

Este número es muy pequeño comparando con la dimensión d .

Algunas aplicaciones de la transformada cuántica de Fourier

- El algoritmo de Shor para factorizar números naturales.
- Determinación del logaritmo discreto.
- El algoritmo de estimación de fase.
- Operaciones aritméticas con registros cuánticos.
- Solución del problema del subgrupo escondido.