Forma polar de números complejos (repaso breve)

Objetivos. Repasar la forma polar de números complejos.

Requisitos. Números complejos, funciones trigonométricas, valor absoluto de números complejos, circunferencia unitaria y divisibilidad de un número real entre otro.

1. Definición de la igualdad de dos números complejos (repaso).
Sean $z = x + \mathrm{i}\,y$, $w = u + \mathrm{i}\,v$, donde $x, y, u, v \in \mathbb{R}$. ¿Cuándo se dice que z y w son iguales?

$$z = w \qquad \iff \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

2. Definición del valor absoluto de un número complejo (repaso).
Sea $z = x + \mathrm{i}\,y$, donde $x, y \in \mathbb{R}$. Entonces por definición $\quad |z| := \sqrt{\qquad\qquad\qquad}\,.$

3. Criterio de la igualdad a cero de la suma de dos números no negativos.
Sean $a, b \geq 0$. ¿Cuándo es posible la igualdad $a + b = 0$?

4. ¿Cuándo se anula el valor absoluto de un número complejo?.
Sea $z = x + \mathrm{i}\,y$, donde $x, y \in \mathbb{R}$. Demuestre que $\quad |z| = 0 \quad \iff \quad z = 0.$

5. El valor absoluto del producto de dos números complejos (repaso).
Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Recuerde y complete la fórmula (sin demostración):

$$|z_1 z_2| =$$

6. El valor absoluto del cociente de dos números complejos.
Sean $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$, donde $w_2 \neq 0$. Enuncie y demuestre la fórmula:

$$\left|\frac{w_1}{w_2}\right| =$$

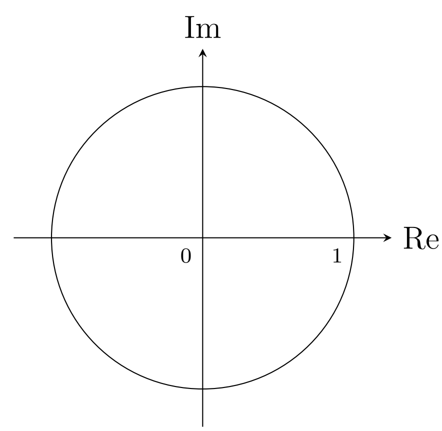
Sugerencia: utilice el resultado del ejercicio anterior.

Fórmula de Euler (repaso, sin demostración). Para todo $\theta \in \mathbb{R}$,

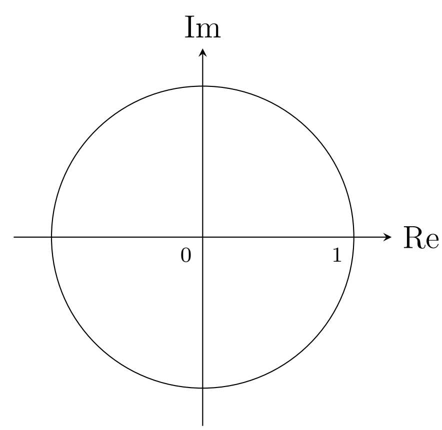
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta). \tag{1}$$

7. El valor absoluto del número $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\,\boldsymbol{\theta}}$.
Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Calcule $|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\,|$.

8. Sentido geométrico de los números de la forma $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\,\boldsymbol{\theta}}$.
Indique en el plano complejo el número $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ con $\theta = \frac{\pi}{6}$.
Ya está dibujada la circunferencia unitaria.



Indique en el plano complejo el número $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi}$.



9. El sentido geométrico del número $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$.
Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Consideramos $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ como un punto del plano complejo.

- El punto $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ está en la circunferencia con centro $\underbrace{\qquad}_{?}$ y de radio $\underbrace{\qquad}_{?}$.

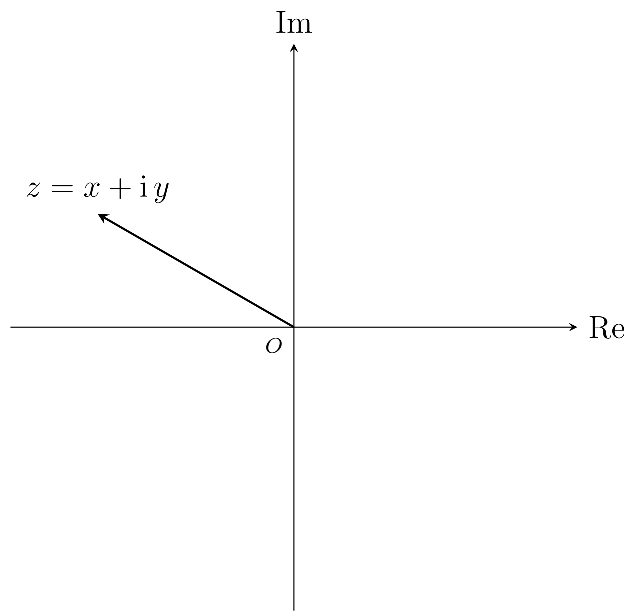
- El número θ muestra ...

10. El valor absoluto de un número complejo escrito en forma polar.
Sean $r \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ y sea
$$z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}.$$
Calcule $|z|$.

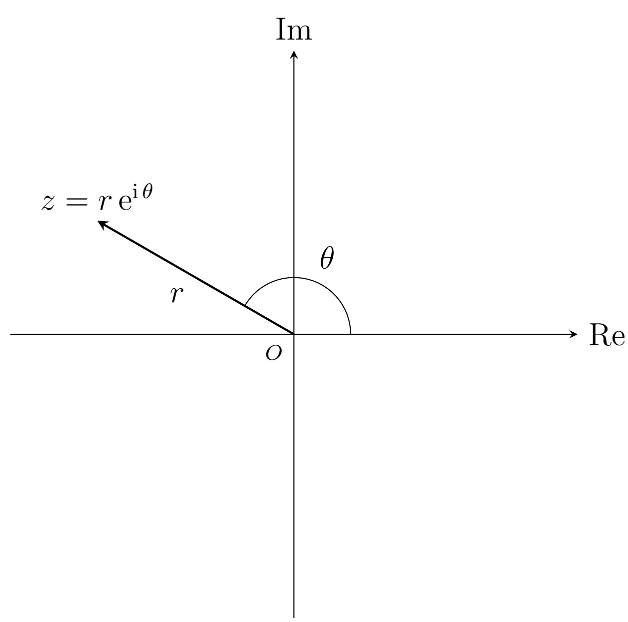
11. Existencia de representación polar para números complejos de valor absoluto 1 (sin demostración). Sea $t \in \mathbb{C}$ tal que $|t| = 1$. Entonces existe un θ en $\mathbb{R}$ tal que
$$t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}.$$
Para construir θ, se usan herramientas finas (por ejemplo, funciones trigonométricas inversas). En este repaso breve no vamos a demostrar este hecho.

12. Existencia de una representación polar de números complejos.
Sea $z \in \mathbb{C}$. Demuestre que existen $r \geq 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$ tales que
$$z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}.$$
Indicaciones. Considere por separado los casos $z = 0$ y $z \neq 0$. En el caso $z \neq 0$ reduzca el problema al hecho 11, esto es, construya un $t \in \mathbb{C}$ tal que $|t| = 1$ y que z se exprese fácilmente a través de t.

Sentido geométrico de la forma algebraica de números complejos. Recordamos que el número complejo $z = x + \mathrm{i}\, y$ se identifica con el punto $P = (x, y)$ del plano cartesiano y también con el vector $\overrightarrow{OP}$, donde $O = (0, 0)$ es el origen.



Sentido geométrico de la forma polar de números complejos. Sea $z = r\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, \theta}$, donde $r \geq 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$. Entonces r es el módulo del vector determinado por el origen de coordenadas y el punto z, y θ el ángulo que forma el vector con el eje real.



Definición: un número real divide a otro (repaso). Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se dice que α *divide* a β y se escribe $\alpha \mid \beta$ si existe un número entero k tal que $\beta = k\alpha$:

$$\alpha \mid \beta \qquad \stackrel{\text{def}}{\iff} \qquad \exists k \in \mathbb{Z} \quad \beta = k\alpha.$$

Ejemplos: $\quad \left(-\frac{\pi}{2}\right) \mid \frac{3\pi}{2}, \qquad 5 \nmid 7, \qquad 2.5 \mid (-12.5), \qquad \sqrt{2} \mid \sqrt{8}, \qquad \sqrt{2} \nmid \sqrt{5}.$

13. Ecuación $\boldsymbol{\cos(\theta) = 1}$.
Recuerde la solución general de la ecuación $\cos(\theta) = 1$.

14. Ecuación $\boldsymbol{\operatorname{sen}(\theta) = 0}$.
Recuerde la solución general de la ecuación $\operatorname{sen}(\theta) = 0$.

15. Relación lógica entre las ecuaciones $\boldsymbol{\cos(\theta) = 1}$ y $\boldsymbol{\operatorname{sen}(\theta) = 0}$.
Determine si una de las siguientes dos ecuaciones implica la otra o al revés:

$$\cos(\theta) = 1 \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{\Rightarrow/\Leftarrow} \qquad \operatorname{sen}(\theta) = 0.$$

16. Criterio para que $\boldsymbol{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = 1}$. Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Demuestre que:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = 1 \qquad \iff \qquad (2\pi) \mid \theta.$$

Explique el sentido geométrico de este criterio.

17. Criterio para que $r\,e^{i\theta} = 1$. Sean $r \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$r\,e^{i\theta} = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} r = 1, \\ (2\pi) \mid \theta. \end{cases}$$

18. Criterio de la igualdad de números complejos escritos en forma polar. Sean $r_1, r_2 > 0$ y $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. Usando los resultados anteriores demuestre que

$$r_1\,e^{i\theta_1} = r_2\,e^{i\theta_2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} r_1 = r_2, \\ (2\pi) \mid (\theta_1 - \theta_2). \end{cases}$$

19. Multiplicación de números complejos ubicados en la circunferencia unitaria y escritos en la forma polar (repaso). Sean $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_1}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}\,. \tag{2}$$

usando las identidades trigonométricas principales:

$$\cos(\theta_1+\theta_2) = \cos(\quad)\cos(\quad) - \operatorname{sen}(\quad)\operatorname{sen}(\quad), \tag{3}$$

$$\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) = \operatorname{sen}(\quad)\operatorname{sen}(\quad) + \operatorname{sen}(\quad)\operatorname{sen}(\quad). \tag{4}$$

Explique el sentido geométrico de (2).

20. Observación sobre las fórmulas trigonométricas principales. En realidad, la función exponencial se puede definir de manera analítica, como la suma de cierta serie, y la fórmula (2) se puede demostrar sin usar funciones trigonométricas. Luego (3) y (4) se pueden deducir de (2). Para recordar (3) y (4), es suficiente escribir (2) y sacar la parte real de ambos lados y luego la parte imaginaria de ambos lados.

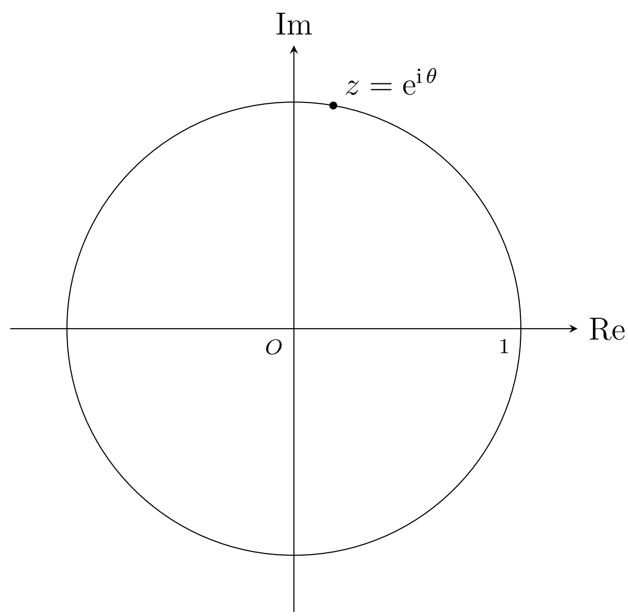
21. Multiplicación de números complejos escritos en la forma polar (repaso). Sean $r_1, r_2 \geq 0$ y $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. Usando (2) muestre que

$$\big(r_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_1}\big)\big(r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_2}\big) = r_1 r_2\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}\,. \tag{5}$$

22. Fórmula de Moivre, versión exponencial.
Sean $r \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ y $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Explique cómo demostrar la siguiente fórmula usando alguno de los resultados anteriores:

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{n\,\mathrm{i}\,\theta}. \tag{6}$$

23. El sentido geométrico de la fórmula de Moivre.
En la circunferencia unitaria está indicado un número $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$.
Encuentre las posiciones de los números z^2, z^3 y z^{-1}.



24. Fórmula de Moivre, versión trigonométrica. Sean $r \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ y $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Escriba (6) en otra forma, sin la función exponencial, usando (1):

$$\left(\cos(\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta)\right)^n = \cos(\qquad) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\qquad).$$