Bases ortonormales en un espacio de dimensión finita con producto interno

Objetivos. Estudiar algunas propiedades de bases ortonormales en un espacio de dimensión finita con producto interno.

Requisitos. Producto interno y sus propiedades básicas, base de un espacio vectorial.

En esta sección suponemos que V es un espacio vectorial complejo y que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno en V. Usamos el acuerdo que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es lineal con respecto al segundo argumento:

$$\begin{array}{ll}
\forall u, v, w \in V & \langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle; \\
\forall u, v \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} & \langle u, \alpha v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle; \\
\forall u, v \in V & \langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}; \\
\forall u \in V \setminus \{\mathbf{0}\} & \langle u, u \rangle > 0.
\end{array}$$

1. Producto interno es lineal conjugado con respecto al primer argumento.
Demuestre las fórmulas:

$$\begin{array}{ll}
\forall u, v, w \in V & \langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle; \\
\forall u, v \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} & \langle \alpha u, v \rangle = \overline{\alpha} \langle u, v \rangle;
\end{array}$$

2. Combinaciones lineales en los argumentos del producto interno (repaso).
Sean $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q \in V$ y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_q \in \mathbb{C}$. Desarrolle el siguiente producto interno:

$$\left\langle \sum_{j=1}^{p} \lambda_j a_j, \sum_{k=1}^{q} \mu_k b_k \right\rangle =$$

3. Definición (sistema ortonormal de vectores).
Un sistema de vectores $a_1, \ldots, a_m \in V$ se llama *ortonormal* si

$$\forall j, k \in \{1, \ldots, m\} \qquad \langle a_j, a_k \rangle = \delta_{j,k}.$$

4. Los coeficientes de una combinación lineal de vectores de un sistema ortonormal se expresan a través del producto interno.
Sea $a_1, \ldots, a_m$ un sistema ortonormal de vectores en V y sea b la combinación lineal de los vectores $a_1, \ldots, a_m$ con algunos coeficientes $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$:

$$b = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j.$$

Demuestre que

$$\forall k \in \{1, \ldots, m\} \qquad \lambda_j = \langle a_j, b \rangle.$$

5. Teorema: todo sistema ortonormal de vectores es linealmente independiente.
Sea $a_1, \ldots, a_m$ un sistema ortonormal de vectores en V. Demuestre que $a_1, \ldots, a_m$ son linealmente independientes.

6. Corolario.
Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión n con un producto interno y sea $a_1, \ldots, a_n$ un sistema ortonormal de vectores en V. Entonces $a_1, \ldots, a_n$ es una base de V.

Bases ortonormales

7. Coordenadas de un vector con respecto a una base ortonormal.
Sea $a_1, \ldots, a_n$ una base ortonormal de V y sea $v \in V$. Demuestre que

$$v = \sum_{j=1}^{n} \langle a_j, v \rangle \, a_j.$$

8. Cálculo del producto interno a través de coordenadas con respecto a una base ortonormal.
Sea $a_1, \ldots, a_n$ una base ortonormal de V y sean $v, w \in V$. Demuestre que

$$\langle v, w \rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{\langle a_j, v \rangle} \, \langle a_j, w \rangle.$$

9. Igualdad de Parseval.
Sea $a_1, \ldots, a_n$ una base ortonormal de V y sea $v \in V$. Demuestre que

$$\|v\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \big| \langle a_j, v \rangle \big|^2.$$