Multiplicación de matrices de Toeplitz por vectores via la Transformada Discreta de Fourier y su inversa

Objetivos. Comprender cómo multplicar matrices de Toeplitz por vectores via la transformada discreta de Fourier y su inversa.

Requisitos. Transformada discreta de Fourier, transformada rápida de Fourier, matrices de Toeplitz, multiplicación de polinomios via la TDF.

1. Matrices de Toeplitz.
Sea T una matriz de Toeplitz de orden n:

$$T_n = \left[t_{j-k}\right]_{j,k=0}^{n-1}.$$

Escriba T_3:

$$T_3 = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}.$$

2. Otra notación para las entradas de la matriz de Toeplitz.
Cambiamos la notación para las entradas de la matriz de Toeplitz de tal manera que los índices no sean negativos sino empiecen con 0, por ejemplo:

$$T_3 = \begin{bmatrix} u_2 & u_1 & u_0 \\ u_3 & u_2 & u_1 \\ u_4 & u_3 & u_2 \end{bmatrix}.$$

Escriba cómo se expresan u a través de t y viceversa si el orden de la matriz es n:

$$u_k = \underbrace{\qquad}_{?} \qquad\qquad t_k = \underbrace{\qquad}_{?}$$

3. Producto de una matriz de Toeplitz por un vector, $n = 3$.
Sea $a \in \mathbb{C}^3$ y sea $b = T_n a$. Exprese las componentes de b a través de las entradas de T_n y las componentes de a. Primero use la notación t_{j-k}, luego $u_?$:

$$b_0 = \underbrace{\qquad}_{t_?} a_0 + \underbrace{\qquad}_{t_?} a_1 + \underbrace{\qquad}_{t_?} a_2 = \underbrace{\qquad}_{u_?} a_0 + \underbrace{\qquad}_{u_?} a_1 + \underbrace{\qquad}_{u_?} a_2,$$

$$b_1 =$$

$$b_2 =$$

4. Producto de una matriz de Toeplitz por un vector.
Sea $a \in \mathbb{C}^n$ y sea $b = T_n a$. Exprese las componentes de b a través de las entradas de T_n y las componentes de a. Primero use la notación t_k, luego u_k:

$$b_j = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\qquad\quad}_{t_?} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\qquad\quad} a_k.$$

5. Producto de los polinomios.
Sean P y Q polinomios con coeficientes u_j y v_j:

$$P(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + u_3 z^3 + u_4 z^4 + \ldots, \qquad Q(z) = v_0 + v_1 z + v_2 z^2 + v_3 z^3 + v_4 z^4 + \ldots.$$

Denotemos por w_j al coeficiente de z^j en el polinomio $P(z)Q(z)$:

$$P(z)Q(z) = w_0 + w_1 z + w_2 z^2 + w_3 z^3 + w_4 z^4 + \ldots.$$

Exprese w_j a través de los coeficientes u y v:

$$w_0 =$$

$$w_1 =$$

$$w_2 =$$

$$w_3 =$$

$$w_4 =$$

En general,

$$w_j = \sum_{k=}$$

6. Producto de una matriz de Toeplitz por un vector via el producto de los polinomios.
Sea T_n una matriz de Toeplitz con entradas u_j, $j \in \{0, \ldots, 2n-1\}$, sea $a \in \mathbb{C}^n$ y sea $b = T_n a$. Defina $v \in \mathbb{C}^{2n-1}$ de tal manera que las componentes del vector sean ciertos coeficientes del producto de los polinomios

$$P(z) = \sum_{j=0}^{2n-1} u_j z^j, \qquad Q(z) = \sum_{j=0}^{2n-1} v_j z^j.$$