Matrices que conmutan con desplazamientos cíclicos

Requisitos. Matrices diagonales.

Proposición 1. *Sea $a \in \mathbb{C}^n$ tal que $a_j \neq a_k$ para cada j, k en $[\![0, n[\![$ y sea $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que*

$$X \operatorname{diag}(a) = \operatorname{diag}(a) X.$$

Entonces existe b en $\mathbb{C}^n$ tal que $X = \operatorname{diag}(b)$.

Demostración. Sean $p, q \in [\![0, n[\![$ tales que $p \neq q$. Tenemos que mostrar que $X_{p,q} = 0$. Consideremos la entrada (p, q) tal producto:

$$(X \operatorname{diag}(a))_{p,q} = \sum_{k=0}^{n-1} X_{p,k} (\operatorname{diag}(a))_{k,q} = \sum_{k=0}^{n-1} X_{p,k} \delta_{k,q} a_q = X_{p,q} a_q,$$

$$(\operatorname{diag}(a) X)_{p,q} = \sum_{k=0}^{n-1} (\operatorname{diag}(a))_{p,k} X_{k,q} = \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{p,k} a_p X_{k,q} = a_p X_{p,q}.$$

Como $X \operatorname{diag}(a) = \operatorname{diag}(a) X$, concluimos que $X_{p,q} a_q = X_{p,q} a_p$, luego $X_{p,q}(a_q - a_p) = 0$. Recordamos que $a_q \neq a_p$, por eso $X_{p,q} = 0$. □

Matrices invariantes bajo desplazamientos cíclicos

Definición 2 (operador del desplazamiento cíclico a la derecha)**.** Denotemos por R al operador $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ definido mediante la regla

$$(Rx)_j := \begin{cases} x_{n-1}, & j = 0; \\ x_{j-1}, & 1 \leq j < n. \end{cases}$$

Ejemplo 3. Si $n = 4$, entonces

$$C(e_1) x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Rx.$$

Hemos mostrado que $C(e_1)$ es la matriz asociada al operador lineal R, respecto a la base canónica del espacio vectorial $\mathbb{C}^4$.

Proposición 4. *$C(e_1) x = Rx$ para cada x en $\mathbb{C}^n$, esto es, $C(e_1)$ es la matriz asociada al operador lineal R respecto a la base canónica del espacio vectorial $\mathbb{C}^n$.*

Demostración. Sea $x \in \mathbb{C}^n$. Entonces

$$(C(e_1)x)_j = \sum_{k=0}^{j} (e_1)_{j-k} x_k + \sum_{k=j+1}^{n-1} (e_1)_{j-k+n} x_k = \sum_{k=0}^{j} \delta_{1,j-k} x_k + \sum_{k=j+1}^{n-1} \delta_{1,j-k+n}.$$

Para $j = 0$ obtenemos

$$(C(e_1)x)_j = \delta_{1,0} x_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \delta_{1,n-k} x_k = x_{n-1}.$$

Para cada j en $[\![1, n[\![$, se queda solamente el sumando de la primera suma tal que $1 = j-k$, esto es, $k = j - 1$:

$$(C(e_1)x)_j = x_{j-1}.$$

Hemos mostrado que $C(e_1)x = Rx$. □

Proposición 5 (descomposición espectral del operador de desplazamiento cíclico)**.**

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} F_n\right) C(e_1) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} F_n\right)^* = \operatorname{diag}(\omega_n^0, \omega_n^1, \ldots, \omega_n^{n-1}).$$

Demostración. Sabemos que

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} F_n\right) C(a) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} F_n\right)^* = \operatorname{diag}(F_n a).$$

Aplicamos este resultado con $a = e_1$. Falta calcular las componentes del vector $F_n e_1$:

$$(F_n e_1)_j = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{jk} \delta_{1,k} = \omega_n^j.$$ □

Ejercicio 6. Explicar por qué cualquier matriz circulante conmuta con $C(e_1)$.

Teorema 7. *Sea A una matriz que conmuta con $C(e_1)$. Entonces la matriz $\frac{1}{\sqrt{n}} F^*$ diagonaliza la matriz A, esto es,*

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} F_n\right) A \left(\frac{1}{\sqrt{n}} F_n\right)^* \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C}).$$

Demostración. Por brevedad, pongamos $\widetilde{F}_n \coloneqq \frac{1}{\sqrt{n}} F_n$. Sean

$$W \coloneqq \widetilde{F}_n C(e_1) \widetilde{F}_n^*, \qquad X \coloneqq \widetilde{F}_n A \widetilde{F}_n^*.$$

Sabemos que

$$A C(e_1) = C(e_1) A.$$

Esta igualdad se puede escribir en la forma

$$\widetilde{F}_n C(e_1) \widetilde{F}_n^* \widetilde{F}_n A \widetilde{F}_n^* = \widetilde{F}_n A \widetilde{F}_n^* \widetilde{F}_n C(e_1) \widetilde{F}_n^*,$$

esto es, $WX = XW$. Por la Proposición 5, la matriz W es diagonal, y sus entradas diagonales son diferentes a pares. Luego por la Proposición 1 concluimos que la matriz X es diagonal. □