Producto interno en un espacio vectorial complejo (repaso de algunas propiedades básicas)

En esta sección suponemos que V es un espacio vectorial complejo y que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno en V. Usamos el acuerdo que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es lineal con respecto al segundo argumento:

$$\begin{array}{ll} \forall u, v, w \in V & \langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle; \\ \forall u, v \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} & \langle u, \alpha v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle; \\ \forall u, v \in V & \langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}; \\ \forall u \in V \setminus \{\mathbf{0}\} & \langle u, u \rangle > 0. \end{array}$$

1. Producto interno es lineal conjugado con respecto al primer argumento. Demuestre las fórmulas:

$$\begin{array}{ll} \forall u, v, w \in V & \langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle; \\ \forall u, v \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} & \langle \alpha u, v \rangle = \overline{\alpha} \langle u, v \rangle; \end{array}$$

2. Producto interno y el vector cero. Sea $v \in V$. Demuestre que

$$\langle v, \mathbf{0} \rangle = 0.$$

Puede basar la demostración en la propiedad aditiva o en la propiedad homogénea.

3. Combinación lineal en el segundo argumento del producto interno, el caso de tres sumandos. Sean $a, b_1, b_2, b_3 \in V$ y sean $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{C}$. Desarrolle el siguiente producto interno (primero aplique la propiedad aditiva, luego la homogénea):

$$\begin{aligned}\big\langle a, \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \mu_3 b_3 \big\rangle &= \\ &= \end{aligned}$$

4. Combinación lineal en el segundo argumento del producto interno. Sean $a, b_1, \ldots, b_q \in V$ y sean $\mu_1, \ldots, \mu_q \in \mathbb{C}$. Desarrolle el siguiente producto interno (primero aplique la propiedad aditiva, luego la homogénea):

$$\left\langle a, \sum_{k=1}^{q} \mu_k b_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{q} \qquad\qquad\qquad = \sum_{k=1}^{q}$$

5. Combinación lineal en el primer argumento del producto interno, el caso de dos sumandos. Sean $a_1, a_2, b \in V$ y sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Desarrolle el siguiente producto interno (primero aplique la propiedad aditiva, luego la homogénea conjugada):

$$\begin{aligned}\big\langle \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b \big\rangle &= \\ &= \end{aligned}$$

6. Combinación lineal en el primer argumento del producto interno. Sean $a_1, \ldots, a_p, b \in V$ y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_q \in \mathbb{C}$. Desarrolle el siguiente producto interno (primero aplique la propiedad aditiva, luego la homogénea):

$$\left\langle \sum_{j=1}^{p} \lambda_j a_j, b \right\rangle = \sum_{j=1}^{p} \qquad\qquad\qquad = \sum_{k=1}^{p}$$

7. Sumas dobles, comprender la notación. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ algunos números. Escriba la siguiente suma doble de manera explícita:

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{2}\alpha_j\beta_k = \sum_{k=1}^{2}\alpha_1\beta_k + \sum_{k=1}^{2} \qquad\qquad + \sum_{k=1}^{2}$$

$$= (\qquad + \qquad) + (\qquad + \qquad)(\qquad + \qquad)$$

$$= \qquad + \qquad + \qquad + \qquad + \qquad + \qquad .$$

8. Sumas en los argumentos del producto interno, un caso particular. Sean $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 \in V$. Desarrolle el siguiente producto interno:

$$\langle a_1 + a_2 + a_3, b_1 + b_2 \rangle =$$

9. Sumas en los argumentos del producto interno. Sean $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q \in V$. Desarrolle el siguiente producto interno:

$$\left\langle \sum_{j=1}^{p} a_j, \sum_{k=1}^{q} b_k \right\rangle =$$

10. Combinaciones lineales en los argumentos del producto interno, un caso particular. Sean $a_1, a_2, b_1, b_2, b_3 \in V$ y sean $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{C}$. Desarrolle el siguiente producto interno:

$$\big\langle \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \mu_3 b_3 \big\rangle =$$

11. Combinaciones lineales en los argumentos del producto interno.
Sean $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q \in V$ y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_q \in \mathbb{C}$. Desarrolle el siguiente producto interno:

$$\left\langle \sum_{j=1}^{p} \lambda_j a_j, \sum_{k=1}^{q} \mu_k b_k \right\rangle =$$

12. Resumen (combinaciones lineales en los argumentos del producto interno.
Sean $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q \in V$ y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_q \in \mathbb{C}$. Entonces:

$$\boxed{\left\langle \sum_{j=1}^{p} \lambda_j a_j, \sum_{k=1}^{q} \mu_k b_k \right\rangle = \qquad\qquad\qquad\qquad}$$