Fórmulas para sumas trigonométricas, camino real

1 Teorema. *Sea α un número real que no es múltiplo de 2π. Entonces*

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\alpha) = \cos\left(\frac{n\alpha}{2}\right)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}(k\alpha) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\alpha}{2}\right)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \tag{2}$$

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(k\alpha) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\alpha}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \tag{3}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\cos\left(\frac{n\alpha}{2} + \beta\right), \tag{4}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{sen}(k\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\operatorname{sen}\left(\frac{n\alpha}{2} + \beta\right). \tag{5}$$

Las fórmulas (1) y (2) se llaman *identidades trigonométricas de Lagrange*. La función definida por las expresiones (3) se denomina el *núcleo de Dirichlet*.

Las fórmulas (1) y (2) son casos particulares de (4) y (5) que corresponden a $\beta = 0$.

Vamos a explicar cómo demostrar las fórmulas (3), (4) y (5) por el "camino real", multiplicando el lado izquierdo por $2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$ y simplificando sumas telescópicas.

2 Proposición (simplificación de sumas telescópicas)**.** *Sean* $a_0, \ldots, a_n$ *algunos números. Entonces*

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0. \tag{6}$$

Demostración para $n = 4$*.*

$$\sum_{k=1}^{5} (a_k - a_{k-1}) = a_1 - a_0 + a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + a_4 - a_3 = a_4 - a_0. \qquad \square$$

Demostración general basada en propiedades de sumas. Primero aplicamos la propiedad lineal de $\sum$:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}$$

en la segunda suma hacemos un cambio de variable $j = k - 1$:

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{j=0}^{n-1} a_j.$$

Separamos la primera suma en dos partes que corresponden a los conjuntos de índices $\{1, \ldots, n-1\}$ y $\{n\}$, y la segunda suma en dos partes que corresponden a los conjuntos de índices $\{0\}$ y $\{1, \ldots, n-1\}$:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n - a_0 - \sum_{j=1}^{n-1} a_j = a_n - a_0. \qquad \square$$

Demostración por inducción. Si $n = 1$, entonces ambos lados de (6) son iguales a la diferencia $a_1 - a_0$. Con esto tenemos una base de inducción. Vamos a demostrar el paso de inducción. Supongamos que se cumple (6) y probemos que

$$\sum_{k=1}^{n+1} (a_k - a_{k-1}) = a_{n+1} - a_0.$$

Vamos a transformar el lado izquierdo. Empezamos con la definición inductiva de $\sum$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (a_k - a_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) + (a_{n+1} - a_n),$$

aplicamos la hipótesis de inducción y al simplificar obtenemos el resultado deseado:

$$= (a_n - a_0) + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_0. \qquad \square$$

3 Ejercicio. Resuelva la ecuación $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = 0$.

4 Proposición (repaso)**.** *Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$2\operatorname{sen}(x)\cos(y) = \operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y), \tag{7}$$
$$2\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) = \cos(x-y) - \cos(x+y). \tag{8}$$

5 Proposición (repaso)**.** *Sean $u, v \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$\cos(u) - \cos(v) = 2\operatorname{sen}\frac{u+v}{2}\operatorname{sen}\frac{v-u}{2}, \tag{9}$$
$$\operatorname{sen}(u) - \operatorname{sen}(v) = 2\operatorname{sen}\frac{u-v}{2}\cos\frac{u+v}{2}. \tag{10}$$

Demostración de la fórmula para el núcleo de Dirichlet

Demostración de la fórmula (3). Multiplicamos el lado izquierdo de (3) por $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$, aplicamos la ley distributiva y luego la fórmula trigonométrica (7):

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(k\alpha)\right) &= \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos(k\alpha) \\ &= \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\alpha}{2} - \operatorname{sen}\frac{(2k-1)\alpha}{2}\right).\end{aligned} \tag{11}$$

Denotamos $\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\alpha}{2}$ por a_k y notamos que

$$a_{k-1} = \operatorname{sen}\frac{(2k-1)\alpha}{2}, \qquad a_0 = \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}.$$

Con esta notación la suma (11) se escribe de la siguiente manera y se simplifica por la fórmula (6):

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_0 + a_n - a_0 = a_n.$$

Hemos demostrado la igualdad

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(k\alpha)\right) = \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\alpha}{2}. \tag{12}$$

La condición que α no es múltiplo de 2π garantiza que $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} \neq 0$. Dividiendo ambos lados de (12) entre $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$ obtenemos (3). □

Demostración de las identidades trigonométricas de Lagrange

Demostración de la identidad (4). Multiplicamos el lado izquierdo de (4) por $2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$, aplicamos la ley distributiva y la fórmula (7):

$$\begin{aligned} 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\sum_{k=0}^{n}\cos(k\alpha+\beta) &= \sum_{k=0}^{n} 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos(k\alpha+\beta) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\operatorname{sen}\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha+\beta\right)-\operatorname{sen}\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha+\beta\right)\right). \qquad (13) \end{aligned}$$

Usamos la notación

$$a_k = \operatorname{sen}\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha+\beta\right);$$

entonces

$$a_{k-1} = \operatorname{sen}\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha+\beta\right).$$

Ahora la suma (13) se escribe de la siguiente manera y se simplifica con la fórmula (6):

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n - a_{-1}.$$

Regresamos a las funciones trigonométricas y aplicamos (10):

$$\begin{aligned} 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\sum_{k=0}^{n}\cos(k\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha+\beta\right)-\operatorname{sen}\left(\left(-1+\frac{1}{2}\right)\alpha+\beta\right) \\ &= \operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha+\beta\right)-\operatorname{sen}\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= 2\operatorname{sen}\frac{(n+1)\alpha}{2}\cos\left(\frac{n\alpha}{2}+\beta\right). \end{aligned}$$

Dividiendo entre $2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$ obtenemos (4). □

6 Ejercicio. Con el mismo método demuestre (5) aplicando las identidades trigonométricas convenientes y la fórmula para la suma telescópica. También puede demostrar directamente

7 Ejercicio. Las identidades (1) y (2) son casos particulares de (4) y (5). Para repasar el método, se recomienda demostrar (1) y (2) directamente.