Algunas sumas trigonométricas especiales, camino real

Objetivos. Deducir fórmulas para algunas sumas trigonométricas especiales.

Requisitos. Divisibilidad de números reales, suma de la progresión geométricas, fórmulas trigonométricas principales.

1. Fórmulas trigonométricas principales (repaso).
Recuerde la fórmulas:

$$\cos(\alpha + \beta) =$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) =$$

2. Paridad o imparidad de cos y sen.
Recuerde cuál de las dos funciones cos y sen es par y cuál es impar:

$$\cos(-\alpha) =$$

$$\operatorname{sen}(-\alpha) =$$

3. Fórmulas para $\cos(\alpha - \beta)$ y $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$.
Sustituyendo β por $-\beta$ en las fórmulas del Ejercicio 1 y usando las fórmulas del Ejercicio 2 deduzca fórmulas para $\cos(\alpha - \beta)$ y $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$:

$$\cos(\alpha - \beta) =$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) =$$

4. Fórmulas para cos y sen de ángulos dobles.
En las fórmulas para $\cos(\alpha + \beta)$ y $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ ponga $\beta = \alpha$:

$$\cos(2\alpha) =$$

$$\operatorname{sen}(2\alpha) =$$

Deducción de las fórmulas para productos de dos funciones trigonométricas

5. Escriba otra vez las fórmulas trigonométricas principales:

$$\cos(\alpha + \beta) = \tag{1}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \tag{2}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \tag{3}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \tag{4}$$

6. Fórmulas para los productos de cos y sen.
Sumando la identidad (1) con la identidad (2) deduzca una fórmula para el siguiente producto de cosenos:

$$2\cos(\alpha)\cos(\beta) = \tag{5}$$

Ahora de (2) reste (1):

$$2\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) = \tag{6}$$

Sume (3) con (4):

$$2\sin(\alpha)\cos(\beta) = \tag{7}$$

Reste (4) de (3):

$$2\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) = \tag{8}$$

7. Fórmulas para $\cos^2(\alpha)$, $\operatorname{sen}^2(\alpha)$ y $2\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha)$.
Ponga $\beta = \alpha$ en (5), (6) y (7):

$$2\cos^2(\alpha) =$$

$$2\operatorname{sen}^2(\alpha) =$$

$$2\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha) =$$

Deducción de las fórmulas para sumas y diferencias de dos funciones trigonométricas

8. Fórmulas para productos de dos funciones trigonométricas (repaso).
Escriba otra vez las fórmulas (5), (6), (7) y (8):

$$2\cos(\alpha)\cos(\beta) =$$

$$2\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) =$$

$$2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) =$$

$$2\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) =$$

9. Un sistema de dos ecuaciones lineales.
Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Encuentre $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ que satisfagan el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha & + & \beta & = & x; \\ \alpha & - & \beta & = & y. \end{cases}$$

Respuesta:

$$\alpha = \frac{\qquad}{2}, \qquad \beta =$$

10. Fórmulas para sumas y diferencias de cos y sen.
Usando los resultados de los ejercicios anteriores escriba fórmulas para las siguientes sumas y diferencias de funciones trigonométricas:

$$\cos(x) + \cos(y) = \tag{9}$$

$$\cos(x) - \cos(y) = \tag{10}$$

$$\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) = \tag{11}$$

$$\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y) = \tag{12}$$

11. Divisibilidad de números reales (repaso).
Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Recuerde la definición:

$$\alpha \mid \beta \qquad \Longleftrightarrow$$

12. Solución general de la ecuación $\operatorname{sen}(x) = 0$ (repaso).
Recuerde cuando se anula $\operatorname{sen}(x)$:

$$\operatorname{sen}(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}$$

13. Solución general de la ecuación $\operatorname{sen}(x/2) = 0$.
Determine cuando se anula $\operatorname{sen}(x/2)$:

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}$$

14. Producto $\cos(k\alpha)$ por $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$.
Recuerde la fórmula (8):

$$2\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) =$$

Aplicando esta fórmula transforme el siguiente producto:

$$2\cos(k\alpha)\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \tag{13}$$

15. Producto $\operatorname{sen}(k\alpha)$ por $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$.
Recuerde la fórmula (6):

$$2\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) =$$

Aplicando esta fórmula transforme el siguiente producto:

$$2\operatorname{sen}(k\alpha)\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \tag{14}$$

Deducción informal de la fórmula para la suma $1 + \cos(\alpha) + \cos(2\alpha) + \ldots + \cos(n\alpha)$

16. Escriba otra vez la fórmula (13):

$$2\cos(k\alpha)\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2} =$$

17. Aplicando la fórmula del Ejercicio 16 transforme los siguientes productos:

$$2\cos(0\alpha)\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2} =$$

$$2\cos(1\alpha)\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2} =$$

$$2\cos(2\alpha)\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2} =$$

$$2\cos(3\alpha)\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2} =$$

$$2\cos((n-1)\alpha)\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2} =$$

$$2\cos(n\alpha)\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2} =$$

18. Usando los resultados del Ejercicio 17 escriba la fórmula para el siguiente producto:

$$\big(1 + \cos(\alpha) + \cos(2\alpha) + \ldots + \cos(n\alpha)\big) \cdot 2\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2} =$$

La última expresión es de la forma $\mathrm{sen}(\ldots) + \mathrm{sen}(\ldots)$. Transfórmela en un producto:

$$\mathrm{sen}\left(\qquad\qquad\right) + \mathrm{sen}\left(\qquad\qquad\right) =$$

Suponiendo que $\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2} \neq 0$ despeje la suma:

$$1 + \cos(\alpha) + \cos(2\alpha) + \ldots + \cos(n\alpha) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

Deducción formal de la fórmula para la suma $1 + \cos(\alpha) + \cos(2\alpha) + \ldots + \cos(n\alpha)$

19. Escriba otra vez la fórmula (13):

$$2\cos(k\alpha)\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} =$$

20. Cambio de variable en $\sum$.
Ejemplo:

$$\sum_{j=11}^{15} a_{j+8} = \left[\begin{array}{l} k = j+3 \\ j = k-3 \end{array}\right] = \sum_{k=14}^{18} a_{k+5}.$$

Haga el cambio de variable $k = j + 1$:

$$\sum_{j=0}^{n} b_{j+3} = \left[\begin{array}{l} k = j+1 \\ j = \qquad\qquad \end{array}\right] =$$

Sumas telescópicas.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k) &= \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n+1} a_j - \sum_{k=0}^{n} a_k \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j + a_{n+1} - a_0 - \sum_{k=1}^{n} a_k = a_{n+1} - a_0.\end{aligned}$$

21. Usando la fórmula del Ejercicio 19 transforme el siguiente producto en una suma telescópica y simplifique el resultado:

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\cos(k\alpha)\right) 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \sum_{k=0}^{n}\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) =$$

Suponiendo que $2\pi \nmid \alpha$ despeje la suma de cosenos:

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(k\alpha) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$