# Algunas sumas trigonométricas especiales, camino complejo

**Objetivos.** Deducir fórmulas para algunas sumas trigonométricas especiales.

**Requisitos.** Divisibilidad de números reales, suma de la progresión geométricas, fórmulas trigonométricas principales.

**1. Hacia la fórmula para la suma de la progresión geométrica (repaso).** Recordar la fórmula:

$$(1-q)(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}) = \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}$$

**2. Suma de la progresión geométrica (repaso).**

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \begin{cases} \qquad\qquad\qquad\qquad, & q \neq 1; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad, & q = 1. \end{cases}$$

**3. Número $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\,\boldsymbol{\alpha}}$ (repaso).** Dibujar la circunferencia unitaria en el plano complejo y explicar el sentido geométrico del número $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}$.

**4. Fórmula de Euler (repaso).**

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha} = \cos(\alpha) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\alpha). \tag{1}$$

Recuerde cuál de las funciones cos y sen es par y cuál es impar, y exprese $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\alpha}$ a través de cos y sen:

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\alpha} = \tag{2}$$

**5. Parte real e imaginaria de un número complejo (repaso).**
Recordamos que

$$\mathrm{Re}(7+5\,\mathrm{i}) = 7, \qquad \mathrm{Im}(7+5\,\mathrm{i}) = 5.$$

En general, si $z = x + \mathrm{i}\,y$, donde $x, y \in \mathbb{R}$, entonces

$$\mathrm{Re}(z) = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad \mathrm{Im}(z) = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

**6. Parte real e imaginaria del número $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}$ (repaso).**
Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Usando la fórmula (1) escriba la parte real y la parte imaginaria de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}$:

$$\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}\right) = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}, \qquad \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}\right) = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

Poniendo $\alpha = 3\beta$ o $\alpha = m\gamma$ (donde $\beta, \gamma, m \in \mathbb{R}$) obtenemos que

$$\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{3\,\mathrm{i}\,\beta}\right) = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}, \qquad \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{m\,\mathrm{i}\,\gamma}\right) = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

**7. Fórmulas de Euler para cos y sen (repaso).**
Simplificar las siguientes expresiones aplicando (1) y (2):

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\alpha} =$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\alpha} =$$

Expresar cos y sen a través de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}$ y $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\alpha}$:

$$\cos(\alpha) = \frac{\qquad\qquad}{2}; \qquad \mathrm{sen}(\alpha) = \frac{\qquad\qquad}{\phantom{2}}.$$

**8. Divisibilidad de números reales (repaso).**
Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Recuerde la definición:

$$\alpha \mid \beta \qquad \Longleftrightarrow$$

**9. Criterio de la igualdad $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha} = 1$ (repaso).** Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Recuerde qué condición debe cumplir $\alpha$ para que se cumpla la igualdad $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha} = 1$:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha} = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$$

**10. Una suma de las exponenciales (repaso).**

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1 - \qquad\qquad}{1 - \qquad\qquad}, & 2\pi \nmid \alpha; \\ \\ \qquad\qquad\qquad, & 2\pi \mid \alpha. \end{cases}$$

**11. Un truco para trabajar con las diferencias de la forma $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha} - 1$.**
Si $q \neq 1$, entonces

$$q^2 - 1 = q \left( \qquad - \frac{1}{\qquad} \right).$$

Aplicamos este truco a la diferencia $\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\beta} - 1$:

$$\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\beta} - 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\beta} \left( \qquad\qquad - \qquad\qquad \right) = 2\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\beta} \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

Ahora lo mismo con la diferencia $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha} - 1$:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha} - 1 = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\alpha}{2}} \left( \qquad\qquad - \qquad\qquad \right) = 2\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\alpha}{2}} \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

**12. Simplificar el cociente.** Usando el truco del ejercicio anterior simplificar el cociente obtenido en el ejercicio (10), en el caso $\alpha \nmid 2\pi$:

$$\frac{1 - \qquad\qquad}{1 - \qquad\qquad} = \qquad\qquad\qquad\qquad = \mathrm{e}^{?}\, \frac{\operatorname{sen}?}{\operatorname{sen}?} =$$

Resumen: si $2\pi \nmid \alpha$, entonces

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,\alpha} = \qquad \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}. \tag{3}$$

**13. Parte real e imaginaria del número 1.**

$$\operatorname{Re}(1) = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad\qquad \operatorname{Im}(1) = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

**14. Parte real e imaginaria del lado izquierdo de la fórmula (3).**

$$\operatorname{Re}\left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha} + \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\alpha} + \cdots + \mathrm{e}^{(n-1)\,\mathrm{i}\,\alpha}\right) = 1 + \cos(\alpha) + \underbrace{\qquad\qquad}_{?} + \cdots + \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?};$$

$$\operatorname{Im}\left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha} + \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\alpha} + \cdots + \mathrm{e}^{(n-1)\,\mathrm{i}\,\alpha}\right) =$$

**15. Parte real e imaginaria del producto de un número real por un número complejo.** Sea $z = x + \mathrm{i}\,y$, donde $x, y \in \mathbb{R}$, y sea $u \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\operatorname{Re}(uz) = \underbrace{\qquad\quad}_{?}, \qquad \operatorname{Im}(uz) = \underbrace{\qquad\quad}_{?}.$$

**16. Parte real e imaginaria del lado derecho de la fórmula (3).**

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}\right) = \frac{\cos \qquad\qquad \operatorname{sen} \qquad\qquad}{\operatorname{sen}},$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}\right) =$$

**17. Igualdad de números complejos (repaso).**
Sean $z = x + \mathrm{i}\,y$, $w = u + \mathrm{i}\,v$, donde $x, y, u, v \in \mathbb{R}$.
Entonces la igualdad $z = w$ significa que

$$x = \underbrace{\qquad}_{?} \qquad \wedge \qquad y = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

**18. Fórmulas para sumas especiales trigonométricas, $(2\boldsymbol{\pi}) \nmid \boldsymbol{\alpha}$.**
Escriba otra vez la fórmula (3) y deduzca dos fórmulas para sumas trigonométricas.
Si $2\pi \nmid \alpha$, entonces

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,\alpha} =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(k\alpha) =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{sen}(k\alpha) =$$

Como $\operatorname{sen}(0\alpha) = \underbrace{\qquad}_{?}$, la última fórmula se puede escribir también de la siguiente manera:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{sen}(k\alpha) =$$

**19. Caso $2\boldsymbol{\pi} \mid \boldsymbol{\alpha}$.** Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $2\pi \mid \alpha$. Entonces

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,\alpha} =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(k\alpha) =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{sen}(k\alpha) = \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{sen}(k\alpha) =$$