

La transformada finita de Fourier (la matriz de Fourier)

Egor Maximenko

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

18 de julio de 2025

Objetivos

Estudiar la matriz

$$F_d := \frac{1}{\sqrt{d}} \left[\varepsilon_d^{jk} \right]_{j,k=0}^{d-1}, \quad \varepsilon_d := e^{\frac{2\pi i}{d}}.$$

Demostrar que F_d es unitaria:

$$F_d^\dagger F_d = I_d.$$

Ver que cada vector de $\mathbb{C}^n$ se descompone en una combinación lineal de “oscilaciones básicas” (las columnas de F_d).

Ver que la matriz F_d , sin el coeficiente $\frac{1}{\sqrt{d}}$, es una matriz de Vandermonde.

Prerrequisitos

Para entender bien este tema, se recomienda saber los siguientes temas.

- Divisibilidad de números enteros.
- Raíces de la unidad, es decir, números ε_d^m .
- Sumas de la forma $\sum_{k=0}^{d-1} \varepsilon_d^{mk}$.
- Multiplicación de matrices por vectores.

Un libro sobre la matriz de Fourier.



Man Wah Wong (2011):

Discrete Fourier Analysis.

Springer/Birkhäuser.

- 1 Raíces de la unidad (repaso breve)
- 2 La matriz de Fourier y su propiedad unitaria
- 3 La matriz de Fourier es una matriz de Vandermonde
- 4 Idea de la transformada rápida de Fourier

Plan

- 1 Raíces de la unidad (repaso breve)
- 2 La matriz de Fourier y su propiedad unitaria
- 3 La matriz de Fourier es una matriz de Vandermonde
- 4 Idea de la transformada rápida de Fourier

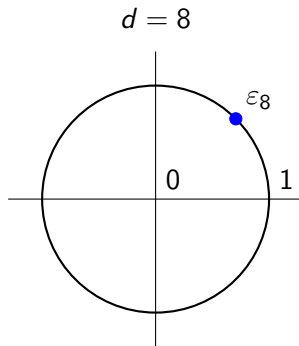
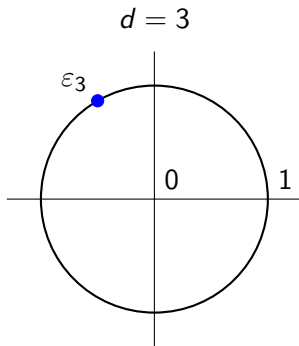
Periodicidad de la función circular $\varphi \mapsto e^{i\varphi}$

Teorema

$$\forall \varphi \in \mathbb{R} \quad e^{i\varphi} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

El número ε_d , donde $d \in \{2, 3, \dots\}$

$$\varepsilon_d := e^{\frac{2\pi i}{d}}.$$

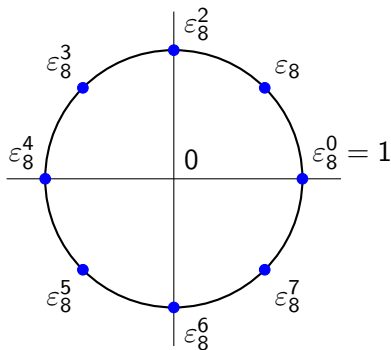


$$\varepsilon_d := e^{\frac{2\pi i}{d}}.$$

La propiedad básica de este número:

$$\varepsilon_d^d = e^{2\pi i} = 1.$$

Potencias del número ε_8



Ejercicio: calcular ε_8^k para $k = 8, k = 9, k = 15, k = -3$.

Criterio para $\varepsilon_d^m = 1$

Teorema

Sean $m \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{N}$.

$$\varepsilon_d^m = 1 \iff m \in d\mathbb{Z} .$$

Lemas sobre divisibilidad

Lema

Sea $m \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ tal que $m \in d\mathbb{Z}$ y $|m| < d$. Entonces,

Lemas sobre divisibilidad

Lema

Sea $m \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ tal que $m \in d\mathbb{Z}$ y $|m| < d$. Entonces,

$$m = 0.$$

Lemas sobre divisibilidad

Lema

Sea $m \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ tal que $m \in d\mathbb{Z}$ y $|m| < d$. Entonces,

$$m = 0.$$

Lema

Sean $p, q \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ tales que $p - q \in d\mathbb{Z}$. Entonces,

Lemas sobre divisibilidad

Lema

Sea $m \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ tal que $m \in d\mathbb{Z}$ y $|m| < d$. Entonces,

$$m = 0.$$

Lema

Sean $p, q \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ tales que $p - q \in d\mathbb{Z}$. Entonces,

$$p = q.$$

Criterio de igualdad $\varepsilon_d^p = \varepsilon_d^q$

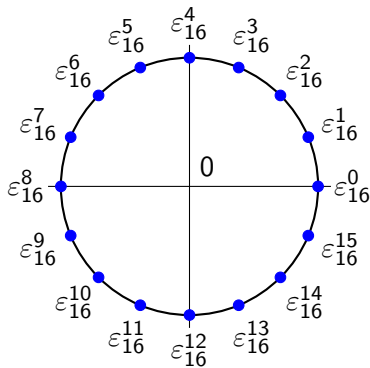
Teorema

Sean $p, q \in \{0, 1, \dots, d-1\}$. Entonces,

$$\varepsilon_d^p = \varepsilon_d^q \iff p - q \in d\mathbb{Z} \iff p = q.$$

El grupo de las d -ésimas raíces de unidad

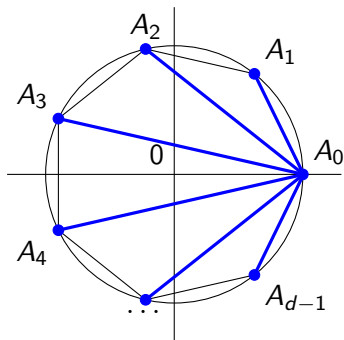
$$\{z \in \mathbb{C}: z^d = 1\} = \{z \in \mathbb{C}: z^d - 1 = 0\} = \{\varepsilon_d^p: p \in \{0, 1, \dots, d-1\}\}.$$



Ejercicio sobre un producto de distancias entre los vértices del polígono regular

Calcule el producto

$$\prod_{k=1}^{d-1} |\overrightarrow{A_0 A_k}|.$$



Sumas de potencias de las raíces de la unidad

Teorema

Sean $d \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$. Entonces,

$$\sum_{k=0}^{d-1} \varepsilon_d^{mk} = \begin{cases} d, & m \in d\mathbb{Z}; \\ 0, & m \notin d\mathbb{Z}. \end{cases}$$

“Ortogonalidad de las potencias de las raíces de la unidad”

Teorema

Sean $p, q \in \{0, 1, \dots, d-1\}$. Entonces,

$$\frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} \varepsilon_d^{-pk} \varepsilon_d^{qk} = \delta_{p,q} = \begin{cases} 1, & p = q; \\ 0, & p \neq q. \end{cases}$$

Demostración

$$\frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} \varepsilon_d^{-pk} \varepsilon_d^{qk} = \frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} \varepsilon_d^{(q-p)k}.$$

Si $p = q$, entonces cada sumando es 1.

Si $p \neq q$, entonces $q - p \notin d\mathbb{Z}$, y la suma es cero.

Conclusión:

$$\frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} \varepsilon_d^{-pk} \varepsilon_d^{qk} = \delta_{p,q}.$$

Plan

- 1 Raíces de la unidad (repaso breve)
- 2 La matriz de Fourier y su propiedad unitaria
- 3 La matriz de Fourier es una matriz de Vandermonde
- 4 Idea de la transformada rápida de Fourier

La matriz de Fourier

$$F_d := \frac{1}{\sqrt{d}} \left[\varepsilon_d^{jk} \right]_{j,k=0}^{d-1}.$$

La transformada finita de Fourier:

$$\mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^d, \quad v \mapsto F_d v.$$

Otras variantes de la matriz de Fourier

$$\frac{1}{\sqrt{d}} \left[\omega_d^{jk} \right]_{j,k=0}^{d-1}, \quad \left[\omega_d^{jk} \right]_{j,k=0}^{d-1},$$

donde

$$\omega_d := e^{-\frac{2\pi i}{d}}, \quad \text{esto es,} \quad \omega_d = \varepsilon_d^{-1}.$$

F_5

$$F_d := \frac{1}{\sqrt{d}} \left[\varepsilon_d^{jk} \right]_{j,k=0}^{d-1}.$$

$$F_5 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{array}{c} j=0 \\ j=1 \\ j=2 \\ j=3 \\ j=4 \end{array} \begin{array}{ccccc} k=0 & k=1 & k=2 & k=3 & k=4 \\ \left[\begin{array}{ccccc} \varepsilon_5^0 & \varepsilon_5^0 & \varepsilon_5^0 & \varepsilon_5^0 & \varepsilon_5^0 \\ \varepsilon_5^0 & \varepsilon_5^1 & \varepsilon_5^2 & \varepsilon_5^3 & \varepsilon_5^4 \\ \varepsilon_5^0 & \varepsilon_5^2 & \varepsilon_5^4 & \varepsilon_5^6 & \varepsilon_5^8 \\ \varepsilon_5^0 & \varepsilon_5^3 & \varepsilon_5^6 & \varepsilon_5^9 & \varepsilon_5^{12} \\ \varepsilon_5^0 & \varepsilon_5^4 & \varepsilon_5^8 & \varepsilon_5^{12} & \varepsilon_5^{16} \end{array} \right] \end{array}.$$

F_5

$$F_5 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \varepsilon_5^0 & \varepsilon_5^0 & \varepsilon_5^0 & \varepsilon_5^0 & \varepsilon_5^0 \\ \varepsilon_5^0 & \varepsilon_5^1 & \varepsilon_5^2 & \varepsilon_5^3 & \varepsilon_5^4 \\ \varepsilon_5^0 & \varepsilon_5^2 & \varepsilon_5^4 & \varepsilon_5^6 & \varepsilon_5^8 \\ \varepsilon_5^0 & \varepsilon_5^3 & \varepsilon_5^6 & \varepsilon_5^9 & \varepsilon_5^{12} \\ \varepsilon_5^0 & \varepsilon_5^4 & \varepsilon_5^8 & \varepsilon_5^{12} & \varepsilon_5^{16} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \text{circle with dot at } 0^\circ & \text{circle with dot at } 72^\circ & \text{circle with dot at } 144^\circ & \text{circle with dot at } 216^\circ & \text{circle with dot at } 288^\circ \\ \text{circle with dot at } 72^\circ & \text{circle with dot at } 144^\circ & \text{circle with dot at } 216^\circ & \text{circle with dot at } 288^\circ & \text{circle with dot at } 0^\circ \\ \text{circle with dot at } 144^\circ & \text{circle with dot at } 216^\circ & \text{circle with dot at } 288^\circ & \text{circle with dot at } 0^\circ & \text{circle with dot at } 72^\circ \\ \text{circle with dot at } 216^\circ & \text{circle with dot at } 288^\circ & \text{circle with dot at } 0^\circ & \text{circle with dot at } 72^\circ & \text{circle with dot at } 144^\circ \\ \text{circle with dot at } 288^\circ & \text{circle with dot at } 0^\circ & \text{circle with dot at } 72^\circ & \text{circle with dot at } 144^\circ & \text{circle with dot at } 216^\circ \end{bmatrix}.$$

Las columnas con índices más grandes corresponden a oscilaciones más rápidas.

F_2

$$F_d = \frac{1}{\sqrt{d}} \left[\varepsilon_d^{jk} \right]_{j,k=0}^{d-1}.$$

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \varepsilon_2^0 & \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_2^0 & \varepsilon_2^1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \text{circle with dot at } (1,0) & \text{circle with dot at } (1,0) \\ \text{circle with dot at } (1,0) & \text{circle with dot at } (0,1) \end{bmatrix}.$$

F_3

$$F_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \varepsilon_3^0 & \varepsilon_3^0 & \varepsilon_3^0 \\ \varepsilon_3^0 & \varepsilon_3^1 & \varepsilon_3^2 \\ \varepsilon_3^0 & \varepsilon_3^2 & \varepsilon_3^4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \text{circle with blue dot at } 120^\circ & \text{circle with blue dot at } 120^\circ & \text{circle with blue dot at } 120^\circ \\ \text{circle with blue dot at } 300^\circ & \text{circle with blue dot at } 300^\circ & \text{circle with blue dot at } 300^\circ \\ \text{circle with blue dot at } 60^\circ & \text{circle with blue dot at } 60^\circ & \text{circle with blue dot at } 60^\circ \end{bmatrix}.$$

F_4

$$F_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} \varepsilon_4^0 & \varepsilon_4^0 & \varepsilon_4^0 & \varepsilon_4^0 \\ \varepsilon_4^0 & \varepsilon_4^1 & \varepsilon_4^2 & \varepsilon_4^3 \\ \varepsilon_4^0 & \varepsilon_4^2 & \varepsilon_4^4 & \varepsilon_4^6 \\ \varepsilon_4^0 & \varepsilon_4^3 & \varepsilon_4^6 & \varepsilon_4^9 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \text{circle with blue dot at } (1,0) & \text{circle with blue dot at } (0,1) & \text{circle with blue dot at } (-1,0) & \text{circle with blue dot at } (0,-1) \\ \text{circle with blue dot at } (1,0) & \text{circle with blue dot at } (0,1) & \text{circle with blue dot at } (-1,0) & \text{circle with blue dot at } (0,-1) \\ \text{circle with blue dot at } (1,0) & \text{circle with blue dot at } (0,1) & \text{circle with blue dot at } (-1,0) & \text{circle with blue dot at } (0,-1) \\ \text{circle with blue dot at } (1,0) & \text{circle with blue dot at } (0,1) & \text{circle with blue dot at } (-1,0) & \text{circle with blue dot at } (0,-1) \end{bmatrix}.$$

F_8

$$F_8 = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} \text{diagram} \end{bmatrix} .$$

The diagram inside the brackets is an 8x8 grid of circles. Each circle contains a blue dot at a specific position, representing a basis vector in the F_8 lattice. The positions of the dots are as follows (row, column):

Row \ Column	1	2	3	4	5	6	7	8
1	Top-right	Top-right	Top-right	Top-right	Top-right	Top-right	Top-right	Top-right
2	Top-right	Top-right	Top	Top-left	Left	Bottom-left	Bottom	Bottom-right
3	Top-right	Top	Left	Bottom	Top-right	Top	Top-right	Left
4	Top-right	Top-left	Bottom	Top-right	Left	Bottom-right	Top	Bottom
5	Top-right	Left	Top-right	Left	Top-right	Left	Top-right	Left
6	Top-right	Bottom	Top	Bottom-right	Left	Top-right	Bottom	Top-left
7	Top-right	Bottom	Left	Top	Top-right	Bottom	Left	Top-right
8	Top-right	Bottom-right	Bottom	Bottom-left	Left	Top-left	Top	Top-right

La matriz de Fourier es unitaria

Teorema

$$F_d^\dagger F_d = I_n.$$

En otras palabras, la matriz F_d es invertible y su inversa es su transpuesta conjugada:

$$F_d^{-1} = F_d^\dagger.$$

Demostración

Sean $p, q \in \{0, 1, \dots, d-1\}$.

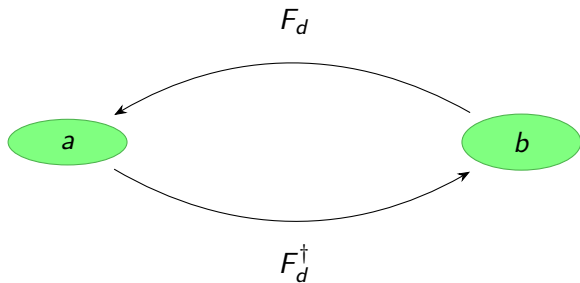
Calculemos la componente (p, q) del producto.

$$(F_d^\dagger F_d)_{p,q} = \sum_{k=0}^{d-1} (F_d^\dagger)_{p,k} (F_d)_{k,q} = \frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} \varepsilon_d^{-pk} \varepsilon_d^{qk} = \delta_{p,q}.$$

Conclusión:

$$(F_d^\dagger F_d)_{p,q} = \delta_{p,q} = (I_d)_{p,q}.$$

F_d como una matriz de cambio de base

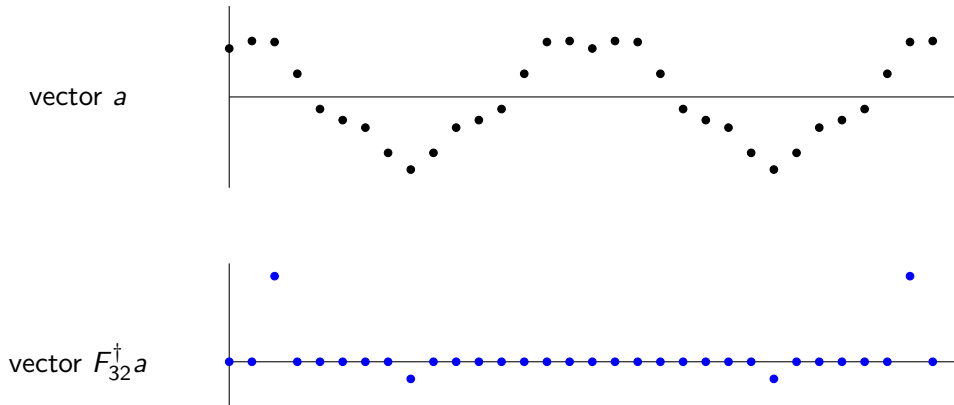


$F_d^\dagger$ descompone un vector en oscilaciones elementales

Si $a \in \mathbb{C}^d$ y $b = F_d^\dagger a$, entonces $a = F_d F_d^\dagger a = F_d b$.

$$a = b_0 \begin{bmatrix} \text{circle with dot at top-right} \\ \text{circle with dot at top-right} \\ \text{circle with dot at top-right} \\ \text{circle with dot at top-right} \\ \text{circle with dot at top-right} \end{bmatrix} + b_1 \begin{bmatrix} \text{circle with dot at top-right} \\ \text{circle with dot at top-right} \\ \text{circle with dot at top-left} \\ \text{circle with dot at bottom-left} \\ \text{circle with dot at bottom-right} \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} \text{circle with dot at top-right} \\ \text{circle with dot at top-left} \\ \text{circle with dot at bottom-right} \\ \text{circle with dot at bottom-right} \\ \text{circle with dot at bottom-left} \end{bmatrix} + b_3 \begin{bmatrix} \text{circle with dot at top-right} \\ \text{circle with dot at top-left} \\ \text{circle with dot at top-right} \\ \text{circle with dot at bottom-right} \\ \text{circle with dot at bottom-left} \end{bmatrix} + b_4 \begin{bmatrix} \text{circle with dot at top-right} \\ \text{circle with dot at bottom-right} \\ \text{circle with dot at top-left} \\ \text{circle with dot at top-left} \\ \text{circle with dot at top-right} \end{bmatrix} .$$

Análisis espectral de datos



a es una combinación lineal de las columnas 2, 8, 24 y 30 de la matriz F_{32} .

Plan

- 1 Raíces de la unidad (repaso breve)
- 2 La matriz de Fourier y su propiedad unitaria
- 3 La matriz de Fourier es una matriz de Vandermonde**
- 4 Idea de la transformada rápida de Fourier

La matriz de Vandermonde asociada a una lista de puntos

Sean $a_0, a_1, \dots, a_{d-1} \in \mathbb{C}$, diferentes a pares.

$$V(a_0, a_1, \dots, a_{d-1}) := \left[a_j^k \right]_{j,k=0}^{d-1}.$$

Para $d = 4$,

$$V(a_0, a_1, a_2, a_3) = \begin{bmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & a_0^3 \\ 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \end{bmatrix}.$$

¿Qué hace la matriz de Vandermonde?

Dado c en $\mathbb{C}^4$, consideramos el polinomio con coeficientes c :

$$P_c(t) := \sum_{k=0}^3 c_k t^k = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3.$$

$$V(a_0, a_1, a_2, a_3)c = \begin{bmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & a_0^3 \\ 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_c(a_0) \\ P_c(a_1) \\ P_c(a_2) \\ P_c(a_3) \end{bmatrix}.$$

$V(a_0, a_1, a_2, a_3)$ convierte los coeficientes del polinomio en los valores de este polinomio en los puntos a_0, a_1, a_2, a_3 .

La matriz de Fourier es una matriz de Vandermonde

(salvo el coeficiente $\frac{1}{\sqrt{d}}$)

$$F_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon_4 & \varepsilon_4^2 & \varepsilon_4^3 \\ 1 & \varepsilon_4^2 & \varepsilon_4^4 & \varepsilon_4^6 \\ 1 & \varepsilon_4^3 & \varepsilon_4^6 & \varepsilon_4^9 \end{bmatrix}$$

La matriz de Fourier es una matriz de Vandermonde

(salvo el coeficiente $\frac{1}{\sqrt{d}}$)

$$F_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon_4 & \varepsilon_4^2 & \varepsilon_4^3 \\ 1 & \varepsilon_4^2 & \varepsilon_4^4 & \varepsilon_4^6 \\ 1 & \varepsilon_4^3 & \varepsilon_4^6 & \varepsilon_4^9 \end{bmatrix} =$$

La matriz de Fourier es una matriz de Vandermonde

(salvo el coeficiente $\frac{1}{\sqrt{d}}$)

$$F_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon_4 & \varepsilon_4^2 & \varepsilon_4^3 \\ 1 & \varepsilon_4^2 & \varepsilon_4^4 & \varepsilon_4^6 \\ 1 & \varepsilon_4^3 & \varepsilon_4^6 & \varepsilon_4^9 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} V(1, \varepsilon_4, \varepsilon_4^2, \varepsilon_4^3).$$

La matriz de Fourier es una matriz de Vandermonde

(salvo el coeficiente $\frac{1}{\sqrt{d}}$)

$$F_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon_4 & \varepsilon_4^2 & \varepsilon_4^3 \\ 1 & \varepsilon_4^2 & \varepsilon_4^4 & \varepsilon_4^6 \\ 1 & \varepsilon_4^3 & \varepsilon_4^6 & \varepsilon_4^9 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} V(1, \varepsilon_4, \varepsilon_4^2, \varepsilon_4^3).$$

La matriz de Fourier convierte los coeficientes de un polinomio en los valores de este polinomio en los puntos $1, \varepsilon_d, \varepsilon_d^2, \dots, \varepsilon_d^{d-1}$, y multiplica estos valores por $\frac{1}{\sqrt{d}}$.

Plan

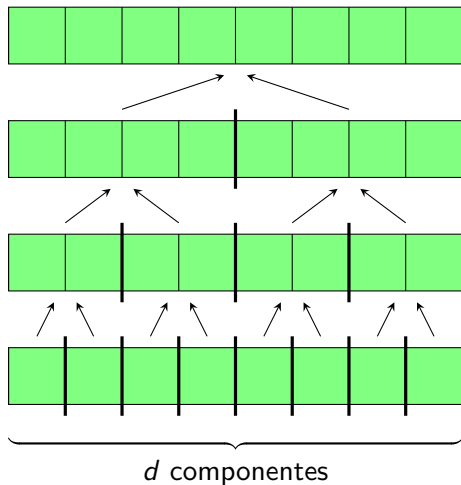
- 1 Raíces de la unidad (repaso breve)
- 2 La matriz de Fourier y su propiedad unitaria
- 3 La matriz de Fourier es una matriz de Vandermonde
- 4 Idea de la transformada rápida de Fourier

Descomposición de la matriz F_4

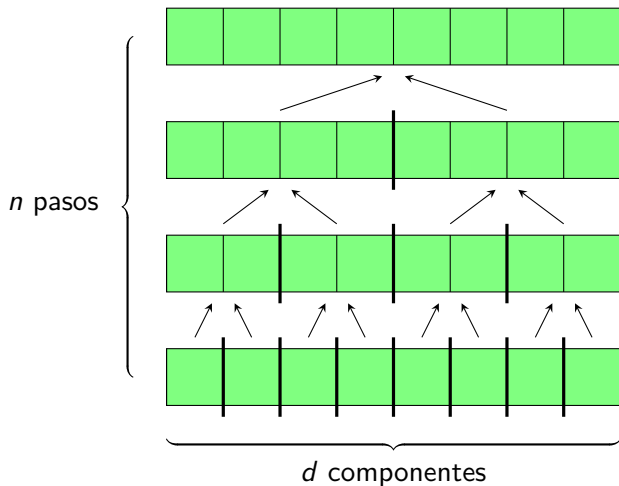
$$F_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & i & 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

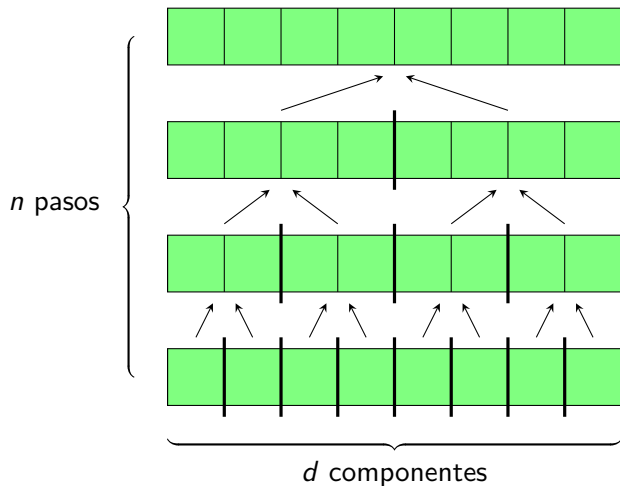
Esquema de la transformada rápida de Fourier, para $d = 2^n$



Esquema de la transformada rápida de Fourier, para $d = 2^n$



Esquema de la transformada rápida de Fourier, para $d = 2^n$



En total,
 $O(d \log_2(d))$
operaciones

Algunas aplicaciones de la transformada rápida de Fourier

- Análisis de datos (determinar oscilaciones).
- Procesamiento de imágenes y sonidos.
- Compresión de sonidos, fotos y videos (mp3, jpeg, mp4).
- Diagonalización de las matrices circulantes.
- Multiplicación rápida de polinomios.
- Multiplicación rápida de números enteros grandes.