Divisibilidad de un número real entre otro

Objetivos. Definir (o repasar) el concepto de divisibilidad de un número real entre otro. Establecer algunas propiedades básicas de esta relación binaria.

Requisitos. Valor absoluto de números reales, elementos de lógica y experiencia de hacer demostraciones simples.

Definición: un número real divide a otro. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se dice que α *divide* a β y se escribe $\alpha \mid \beta$ si existe un número entero k tal que $\beta = k\alpha$:

$$\alpha \mid \beta \qquad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad \exists k \in \mathbb{Z} \qquad \beta = k\alpha.$$

En esta situación se dice también que α es un *divisor* de β y que β es un *múltiplo* de α (más precisamente, β es un *múltiplo entero* de α).

Ejemplos.

$$\frac{\pi}{2} \mid \frac{3\pi}{2}, \qquad 5 \nmid 7, \qquad \sqrt{2} \mid (-\sqrt{8}), \qquad \sqrt{2} \nmid \sqrt{5}, \qquad (-3\pi) \mid (15\pi), \qquad \frac{\sqrt{3}}{55} \mid \sqrt{3}.$$

1. Indique cuáles de los siguientes números son múltiplos de π:

$$\pi, \qquad 5\pi, \qquad \frac{\pi}{2}, \qquad 3, \qquad -\pi, \qquad 0.$$

2. Ejemplo: múltiplos de π con valor absoluto ≤ 10. Encuentre a todos los $\beta \in \mathbb{R}$ tales que $\pi \mid \beta$ y $|\beta| \leq 10$:

$$\pi, \qquad 2\pi, \qquad \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad \underbrace{\qquad}_{?}.$$

3. Indique cuáles de los siguientes números son divisores de π:

$$\pi, \qquad -\pi, \qquad 5\pi, \qquad \frac{\pi}{5}, \qquad -\frac{\pi}{3}, \qquad 0, \qquad 1.$$

4. Ejemplo: divisores de π con valor absoluto ≥ 1. Encuentre a todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha \mid \pi$ y $|\alpha| \geq 1$:

$$\pi, \qquad \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad \underbrace{\qquad}_{?}.$$

5. Ejemplo: el conjunto de todos los divisores de $2\sqrt{7}$. Consideremos el conjunto de los divisores del número $2\sqrt{7}$:

$$D(2\sqrt{7}) \coloneqq \bigl\{\alpha \in \mathbb{R}\colon \quad \alpha \mid (2\sqrt{7})\bigr\}.$$

Escriba algunos 7 elementos del conjunto $D(2\sqrt{7})$.
¿Cuántos elementos tiene este conjunto?

6. Cociente de dos números reales (repaso). Sea $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y sea $\beta \in \mathbb{R}$. Se sabe que en esta situación existe un único número real γ tal que $\beta = \gamma\alpha$.

Este número γ se llama $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$ de β y α y se denota por $\frac{\quad}{\quad}$.

7. Divisibilidad entre un número distinto de cero. Sean $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\beta \in \mathbb{R}$. Repase la definición de la divisibilidad de β entre α:

$$\alpha \mid \beta \qquad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad \exists k \in \mathbb{Z} \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}. \tag{1}$$

Notemos que si existe un k con esta propiedad, entonces este k debe coincidir con $\underbrace{\qquad\quad}_{?}$.

Por consecuencia, en esta situación

$$\frac{\quad}{\quad} \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Al revés, si se cumple (2), entonces el número $\underbrace{\qquad\quad}_{?}$ puede hacer el papel de k en (1).

Resumen. Para cualesquier $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $\beta \in \mathbb{R}$ las siguientes dos condiciones son equivalentes:

$$\alpha \mid \beta \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\quad}{\quad} \in \underbrace{\qquad}_{?}.$$

8. Seguir la definición de divisibilidad trabajando con cero. En los siguientes dos ejercicios vamos a describir los números reales que dividen a cero y luego los números reales que son múltiplos de cero. Nótese que la definición de la divisibilidad (escrita en el inicio de este tema) está escrita en términos de la operación de multiplicación y no utiliza la operación de división. Se recomienda copiar la definición y aplicarla bien en los siguentes ejercicios.

$$\alpha \mid \beta \qquad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$$

9. Determine si $5 \mid 0$.

10. Determine si $(-\sqrt{3}) \mid 0$.

11. Determine si $0 \mid 4$.

12. Determine si $0 \mid (-\pi)$.

13. Determine si $0 \mid 0$.

14. El conjunto de los números reales que dividen a cero.
Encuentre a todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha \mid 0$.

$$D(0) \coloneqq \big\{\alpha \in \mathbb{R}\colon \quad \alpha \mid 0\big\} =$$

15. El conjuntos de los multiplos de cero.
Encuentre a todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $0 \mid \alpha$.

$$0\,\mathbb{Z} \coloneqq \big\{\alpha \in \mathbb{R}\colon \quad 0 \mid \alpha\big\} =$$

16. Propiedad transitiva de la divisibilidad. Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha \mid \beta$ y $\beta \mid \gamma$. Demuestre que $\alpha \mid \gamma$.

17. Se preserva la divisibilidad al multiplicar ambos términos por un número. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha \mid \beta$ y sea $\gamma \in \mathbb{R}$. Demuestre que $(\alpha\gamma) \mid (\beta\gamma)$.

18. Se preserva la divisibilidad al multiplicar el segundo término por un entero. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha \mid \beta$ y sea $m \in \mathbb{Z}$. Demuestre que $\alpha \mid (m\beta)$.

19. Se preserva la divisibilidad al dividir el primer término por un entero. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{Z}$ tales que $(m\alpha) \mid \beta$. Demuestre que $\alpha \mid \beta$.

20. Divisibilidad y cambio del signo. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces las siguientes tres condiciones son equivalentes:

(a) $\alpha \mid \beta$;

(b) $\alpha \mid (-\beta)$;

(c) $(-\alpha) \mid \beta$.

Demostración. (a)$\Rightarrow$(b) Se sigue por el resultado $\underbrace{\qquad}_{?}$ aplicado a los números $\alpha, \beta, \underbrace{\qquad}_{?}$.

(b)$\Rightarrow$(a) Se sigue del mismo resultado $\underbrace{\qquad}_{?}$ aplicado a los números $\alpha, -\beta, \underbrace{\qquad}_{?}$.

(a)$\Rightarrow$(c)

(c)$\Rightarrow$(a) $\square$

21. Definición del valor absoluto de un número real (repaso). Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces el *valor absoluto* de α se denota por $|\alpha|$ y se define de la siguiente manera:

$$|\alpha| = \begin{cases} \qquad , & \text{si} \quad \alpha \geq 0; \\ \qquad , & \text{si} \quad \alpha < 0. \end{cases}$$

22. Propiedad multiplicativa del valor absoluto (repaso).
Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces

$$|\alpha\beta| = \underbrace{\qquad}_{?}\underbrace{\qquad}_{?}.$$

23. Sobre los números enteros entre 0 y 1 (sin demostración).
Aceptamos sin demostración el siguiente hecho:

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad \Big((k \geq 0) \quad \wedge \quad (k < 1)\Big) \qquad \Longrightarrow \qquad (k = 0).$$

En otras palabras, estamos aceptando el hecho que

$$[0, 1) \cap \mathbb{Z} = \underbrace{\qquad\quad}_{?}.$$

24. Si un número entero tiene valor absoluto menor que 1, entonces este número es cero. Sea $k \in \mathbb{Z}$ tal que $|k| < 1$. Entonces $k = 0$.

Demostración. Consideremos dos casos: I. $k \geq 0$. II. $k < 0$.
En ambos casos vamos a aplicar el hecho 23.

Caso I. $k \geq 0$. Entonces la desigualdad $|k| < 1$ se convierte en $\underbrace{\qquad\quad}_{?}$.

Tenemos que $k \in \mathbb{Z}$ y $\underbrace{\qquad}_{?} \leq k < \underbrace{\qquad}_{?}$. Por el hecho 23 concluimos que $k = \underbrace{\qquad}_{?}$.

Caso II. $k < 0$.

□

25. Si un número entero es distinto de cero, entonces su valor absoluto es $\geq$ 1. Sea $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Entonces $|k| \geq 1$.

Es solamente otra forma lógica de la Proposición 24.

Demostración. Razonando por contraposición supongamos que ...

□

26. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{Z}$ tales que $\beta = k\alpha$ y $\beta \neq 0$. Demuestre que $k \neq 0$.

27. Multiplicación de una desigualdad por un número no negativo (repaso). Sea $p \geq 5$ y sea $q \geq 0$. Entonces

$$pq \underbrace{\qquad}_{?} 5q.$$

28. Divisibilidad y comparación del valor absoluto. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha \mid \beta$ y $\beta \neq 0$. Demuestre que $|\alpha| \leq |\beta|$.

29. Divisibilidad y comparación del valor absoluto, otra forma lógica. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha \mid \beta$ y $|\beta| < |\alpha|$. Demuestre que $\beta = 0$.

30. Criterio de la divisibilidad mutua.
Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha \mid \beta$ y $\beta \mid \alpha$. Entonces $|\alpha| = |\beta|$.

Demostración. Consideremos tres casos que abarcan todas las posibilidades.

Caso I. $\alpha = 0$. En este caso de la condición $\underbrace{\qquad\quad}_{?}$ y del resultado $\underbrace{\qquad}_{?}$ sobre los múltiplos de cero concluimos que $\beta = \underbrace{\qquad}_{?}$. Entonces $|\alpha| = \underbrace{\qquad}_{?} = |\beta|$.

Caso II. $\beta = 0$.

Caso II. $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$.

□