Base discreta de Fourier

Objetivos. Definir la base discreta de Fourier y demostrar algunas de sus propiedades.

Requisitos. Raíces de la unidad, sumas de las raíces de la unidad, bases ortonormales.

En esta sección suponemos que $n \in \{1, 2, \ldots\}$.

1. Notación ω_n (repaso).

$$\omega_n \coloneqq \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{n}}.$$

2. Definición de los vectores $f_0, \ldots, f_{n-1}$.
Para todo $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ definamos al vector $f_j \in \mathbb{C}^n$ mediante la siguiente fórmula:

$$f_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\omega_n^{-jk}\right]_{k=0}^{n-1}.$$

3. "Ortogonalidad" de las potencias de las raíces de la unidad (repaso).
Sean $p, q \in \{0, \ldots, n-1\}$. Entonces

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{kp} \omega_n^{-kq} = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

Producto interno canónico en $\mathbb{C}^n$ (repaso).
Consideramos el espacio vectorial $\mathbb{C}^n$ con el *producto interno canónico* (llamado también *producto punto*):

$$\forall u, v \in \mathbb{C}^n \qquad \langle u, v \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{u_k} v_k.$$

Notamos que la función $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es lineal con respecto al segundo argumento y lineal conjugada con respecto al primer argumento.

4. Teorema: el sistema de los vectores $f_0, \ldots, f_{n-1}$ es ortonormal.
Demuestre los vectores $f_0, \ldots, f_{n-1}$ forman un sistema ortonormal, esto es, que para todos $p, q \in \{0, \ldots, n-1\}$ se cumple la igualdad

$$\langle f_p, f_q \rangle = \delta_{p,q}.$$

Vectores ortonormales son linealmente independientes (repaso).
Sea V un espacio vectorial con producto interno. Si $b_0, \ldots, b_{m-1}$ un sistema ortonormal de vectores en V, entonces se sabe que los vectores $b_0, \ldots, b_{m-1}$ son linealmente independientes. Si además la cantidad de estos vectores coincide con la dimensión del espacio V, entonces $b_0, \ldots, b_{m-1}$ es una base de V.

Base discreta de Fourier.
De lo anterior sigue que los vectores $f_0, \ldots, f_{n-1}$ forman una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$. La llamamos la *base de Fourier* del espacio $\mathbb{C}^n$ o la *base discreta de Fourier* de orden n.

5. Coordenadas de un vector con respecto a una base ortonormal (repaso).
Sea V un espacio vectorial con producto interno, sea $b_0, \ldots, b_{n-1}$ una base ortonormal del espacio V y sea $v \in V$. Entonces para todo $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ la j-ésima coordenada del vector v con respecto a la base $b_0, \ldots, b_{n-1}$ se calcula por fórmula:

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?},$$

así que el vector v se expande en una combinación lineal de los vectores $b_0, \ldots, b_{n-1}$ de la siguiente manera:

$$v = \sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?} b_j.$$

6. Coordenadas de un vector con respecto a la base discreta de Fourier.
Sea $z \in \mathbb{C}^n$. Denotemos por $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ a las coordenadas del vector z con respecto a la base $f_0, \ldots, f_{n-1}$. Sea $j \in \{0, \ldots, n-1\}$. Escriba λ_j como un producto interno:

$$\lambda_j = \langle \qquad , \qquad \rangle,$$

luego como una suma usando la notación ω_n:

$$\lambda_j = \qquad \sum_{j=0}^{n-1} \qquad\qquad . \tag{1}$$

Recordando la definición de ω_n escriba la misma suma usando la notación $\mathrm{e}^{?}$:

$$\lambda_j = \qquad \sum_{j=0}^{n-1} \qquad\qquad\qquad .$$

7. Expresión de un vector a través de sus coordenadas con respecto a la base discreta de Fourier.
Sea $z \in \mathbb{C}^n$. Denotemos por $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ a las coordenadas de z con respecto a la base discreta de Fourier. Entonces z es la combinación lineal de los vectores f_j con coeficientes λ_j:

$$z \;=\; \sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

Recuerde la definición de los vectores $f_0, \ldots, f_{n-1}$ y escriba la k-ésima componente del vector z como cierta suma usando la notación ω_n:

$$z_k \;=\; \qquad \sum_{j=0}^{n-1} \qquad\qquad\qquad\qquad. \tag{2}$$

Relación entre la base discreta de Fourier y la transformada discreta de Fourier

8. Transformada Discreta de Fourier (repaso).
Recuerde la definición de la Transformada Discreta de Fourier. Si $z \in \mathbb{C}^n$, entonces

$$\mathcal{F}_n(z) = \Big[\sum_{k=0}^{n-1} \qquad\qquad\qquad \Big]_{j=0}^{n-1}.$$

Denotemos las componentes del vector $\mathcal{F}_n(z)$ por $\hat{z}(0), \ldots, \hat{z}(n-1)$. Entonces para todo $j \in \{0, \ldots, n-1\}$

$$\hat{z}(j) = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

9. Coordenadas de un vector con respecto a la base discreta de Fourier están relacionadas con la Transformada Discreta de Fourier de este vector.
Sea $z \in \mathbb{C}^n$ y sean $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ las coordenadas de z con respecto a la base $f_0, \ldots, f_{n-1}$. Comparando las fórmulas para λ_j y $\hat{z}(j)$ vemos que

$$\lambda_j \;=\; \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

Así que el vector $\big[\lambda_j\big]_{j=0}^{n-1}$ se expresa a través de $\mathcal{F}_n(z)$ de la siguiente manera:

$$\big[\lambda_j\big]_{j=0}^{n-1} \;=\; \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

Construcción de la transformada inversa a la transformada discreta de Fourier usando la base discreta de Fourier

10. Expresión de un vector a través de su transformada discreta de Fourier.
Sea $z \in \mathbb{C}^n$ y sean $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ las coordendas de z con respecto a la base discreta de Fourier. Recordamos la fórmula (2) que permite expresar las componentes del vector z a través de $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$:

$$z_k = \sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

Tomando en cuenta la relación entre λ_j y $\hat{z}(j)$ exprese z_k a través de $\hat{z}(0), \ldots, \hat{z}(n-1)$:

$$z_k = \sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}. \tag{3}$$

11. Fórmula para la transformada inversa a la transformada discreta de Fourier.
Si $z \in \mathbb{C}^n$ y $w = \mathcal{F}_n(z)$, entonces por la fórmula (3) tenemos

$$z_k = \sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{\qquad\qquad}_{?} w_j.$$

Esto significa que la transformada inversa a la transformada discreta de Fourier actúa de la siguiente manera:

$$\mathcal{F}_n^{-1}(w) = \Big[\sum_{j=0}^{n-1} \qquad\qquad \Big]_{k=0}^{n-1}.$$