Matrices circulantes

Ejercicios

Objetivos. Estudiar matrices circulantes y su diagonalización por medio de la transformada discreta de Fourier.

Requisitos. Transformada discreta de Fourier, operaciones con matrices.

En esta sección siempre suponemos que $n \in \{1, 2, \ldots\}$.

Transformada Discreta de Fourier (repaso)

1. Notación $\boldsymbol{\omega_n}$ (repaso). Usamos la notación ω_n del tema *raíces de la unidad*:

$$\omega_n = \mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{n}\,\mathrm{i}}.$$

2. "Ortogonalidad de las raíces de la unidad". Sean $p, q \in \{0, \ldots, n-1\}$. Entonces

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{pk}\omega_n^{-qk} = \begin{cases} \qquad\qquad, & \text{si } p = q; \\ \qquad\qquad, & \text{si } p \neq q. \end{cases}$$

Escriba la respuesta usando la delta de Kronecker:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{pk}\omega_n^{-qk} = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

3. Matriz $\boldsymbol{\Omega_n}$ y su inversa (repaso). Escriba la definición de la matriz de la transformada discreta de Fourier (normalizada):

$$\Omega_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\underbrace{\qquad\qquad}_{?}\right]_{j,k=0}^{n-1}.$$

En otras palabras, Ω_n es una matriz cuadrada de orden n, y su entrada con índices (j, k) es igual a

$$(\Omega_n)_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{n}}\underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

Denotemos por Ω_n^* a la matriz adjunta (transpuesta conjugada) de Ω_n. Demuestre que

$$\Omega_n^*\Omega_n = I_n.$$

Esto significa que la matriz Ω_n es unitaria.

4. Base discreta de Fourier (repaso). Definimos los vectores $f_0, \ldots, f_{n-1} \in \mathbb{C}^n$ mediante la regla:

$$f_p = \left[\frac{1}{\sqrt{n}}\, \omega_n^{pk} \right]_{k=0}^{n-1}.$$

Consideremos la base ordenada $(f_0, \ldots, f_{n-1})$. Demuestre que esta base es ortonormal, esto es,

$$\langle f_p, f_q \rangle = \delta_{p,q}.$$

Matrices circulantes

5. Ejemplo. La forma general de una matriz circulante de orden 4 es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Se ve que la matriz se determina completamente por la primera columna (más bien, por la 0-ésima, porque en este tema es cómodo numerar los renglones y columnas desde 0). Si denotemos esta columna por a:

$$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix},$$

entonces la matriz escrita arriba se denota por $C_4(a)$.

6. Ejemplo. Sea $a \in \mathbb{C}^5$. Escriba la matriz $C_5(a)$.

7. Definición formal de la matriz circulante. Sea $a \in \mathbb{C}^n$ y sean $p, q \in \{0, \ldots, n-1\}$. Escriba la fórmula general para la entrada (p, q) de la matriz $C_n(a)$:

$$(C_n(a))_{p,q} = \begin{cases} \qquad\qquad, & \text{si } p \geq q; \\ \qquad\qquad, & \text{si } p < q. \end{cases}$$

8. Diagonalización de circulantes por medio de la transformada discreta de Fourier. Sea $a \in \mathbb{C}^n$. Calcule el producto

$$\Omega_n C_n(a) \Omega_n^*.$$