Matrices Circulantes

Estos apuntes están escritos por Darío Coutiño Aquino, con sugerencias de Egor Maximenko.

Objetivos. Estudiar matrices circulantes y su diagonalización mediante la transformada discreta de Fourier.

Requisitos. Transformada discreta de Fourier, operaciones con matrices, raíces de la unidad y sus propiedades elementales.

En esta sección siempre suponemos que $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Transformada Discreta de Fourier (repaso)

1 Definición. Se define ω_n como

$$\omega_n = e^{-\frac{2\pi}{n} i}. \tag{1}$$

Es fácil ver que $\omega_n^m = 1$ si, y sólo si, n divide a m. Los números $\omega_n^0, \omega_n^1, \ldots, \omega_n^{n-1}$ son diferentes entre sí y forman el conjunto solución de la ecuación $z^n = 1$.

2 Proposición (Ortogonalidad de las raíces de la unidad)**.** *Sean $p, q \in \{0, \ldots, n-1\}$, entonces*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{pk} \omega_n^{-qk} = \delta_{p,q}. \tag{2}$$

Demostración. Si $p = q$, entonces $\omega_n^{p-q} = 1$ y se tiene que:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{pk} \omega_n^{-qk} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\omega_n^{p-q})^k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = 1.$$

Si $p \neq q$ y como $p, q \in \{0, \ldots, n-1\}$ entonces $|p - q| < n$, por lo tanto n no divide a $p - q$, el número ω_n^{p-q} es distinto de 1, y

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{pk} \omega_n^{-qk} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\omega_n^{p-q})^k = \frac{1}{n} \; \frac{1 - \omega_n^{(p-q)n}}{1 - \omega_n^{p-q}} = \frac{1 - 1}{1 - \omega_n^{p-q}} = 0. \qquad \square$$

3 Definición (Transformada Discreta de Fourier)**.** Denotemos por Ω_n a la siguiente matriz:

$$\Omega_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\; \omega_n^{jk} \; \right]_{j,k=0}^{n-1}. \tag{3}$$

En otras palabras, Ω_n es una matriz cuadrada de orden n, y su entrada con índices (j, k) es igual a

$$(\Omega_n)_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{n}} \omega_n^{jk}. \tag{4}$$

La transformada lineal

$$x \mapsto \Omega_n x \qquad (x \in \mathbb{C}^n)$$

se llama la *Transformada Discreta de Fourier*, y la matriz Ω_n es la *matriz asociada a la Transformada Discreta de Fourier*.

4 Observación. El coeficiente $\frac{1}{\sqrt{n}}$ se necesita para que la matriz Ω_n sea unitaria, véase la Proposición 6. Algunos autores definen la Transformada Discreta de Fourier sin este coeficiente.

5 Observación. En este tema es cómodo numerar las entradas de vectores y matrices comenzando los índices desde 0.

Dada una matriz A, denotamos por A^* su adjunta (transpuesta conjugada). Recordamos que una matriz cuadrada A se llama *unitaria* si

$$AA^* = I_n = A^*A.$$

6 Proposición (Propiedad unitaria de la Transformada Discreta de Fourier)**.** *La matriz Ω_n es unitaria:*

$$\Omega_n^*\Omega_n = I_n. \tag{5}$$

Demostración. La propiedad unitaria de la matriz Ω_n se obtiene directamente de la Proposición 2:

$$(\Omega_n^*\Omega_n)_{p,q} = \sum_{k=0}^{n-1} (\Omega_n^*)_{p,k}(\Omega_n)_{k,q} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \omega_n^{-pk} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \omega_n^{qk} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{(p-q)k} = \delta_{p,q}. \qquad \square$$

7 Definición (Base discreta de Fourier)**.** Definimos los vectores $f_{n,0}, \ldots, f_{n,n-1}$ mediante la regla:

$$f_{n,p} = \left[\frac{1}{\sqrt{n}}\,\omega_n^{pk}\right]_{k=0}^{n-1}. \tag{6}$$

Denotemos por $\mathcal{F}_n$ a la lista de vectores $(f_{n,0}, \ldots, f_{n,n-1})$.

8 Observación. Cada vector $f_{n,p}$ de la Base discreta de Fourier, corresponde a la *p-ésima fila* de la matriz asociada a la Tranformada Discreta de Fourier.

9 Proposición. *$\mathcal{F}_n$ es una base ortonormal del espacio $\mathbb{C}^n$.*

Demostración. De la Proposición 2 se sigue que esta lista de vectores es ortonormal:

$$\langle f_{n,p}, f_{n,q}\rangle = \delta_{p,q}.$$

La propiedad ortonormal implica la independencia lineal. Siendo una lista linealmente independiente de n vectores en el espacio $\mathbb{C}^n$ de dimensión n, $\mathcal{F}_n$ es una base. $\square$

Matrices circulantes

Primero daremos un ejemplo de una matriz circulante.

10 Ejemplo. La forma general de una matriz circulante de orden 5 es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_4 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_4 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Cada columna se obtiene de la anterior al hacer un desplazamiento cíclico hacia abajo. Por consecuencia, la matriz se determina completamente por la primera columna (más bien, por la 0-ésima, porque en este tema es cómodo numerar los renglones y columnas desde 0). Si denotamos esta columna por a:

$$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix},$$

entonces la matriz escrita arriba se denota por $C_5(a)$.

11 Ejercicio. Sea $a \in \mathbb{C}^4$. Escriba la matriz $C_4(a)$.

12 Definición (Definición formal de una matriz circulante)**.** Sea $a \in \mathbb{C}^n$ y sean $p, q \in \{0, \ldots, n-1\}$, entonces la entrada (p, q) de una matriz circulante esta dada por:

$$(C_n(a))_{p,q} = \begin{cases} a_{p-q}, & \text{si} \quad p \geq q; \\ a_{n+p-q}, & \text{si} \quad p < q. \end{cases} \tag{7}$$

Vamos a demostrar que el producto $\Omega_n C_n(a) \Omega_n^*$ es una matriz diagonal. Antes de pasar a la proposición general, daremos un ejemplo.

13 Ejemplo. Sea $a \in \mathbb{C}^2$, entonces

$$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}, \qquad \Omega_2 a = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} a_0 + a_1 \\ a_0 - a_1 \end{bmatrix}.$$

Mostremos que el producto $\Omega_2 C_2(a)\Omega_n^*$ es una matriz diagonal:

$$\begin{aligned}
\Omega_2 C_2(a)\Omega_n^* &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_0 + a_1 & 0 \\ 0 & a_0 - a_1 \end{bmatrix} \\
&= \operatorname{diag}(\sqrt{2}\,\Omega_2(a)).
\end{aligned}$$

14 Proposición (Diagonalizacion de matrices circulantes por medio de la transformada discreta de Fourier)**.** *Sea $a \in \mathbb{C}^n$. Entonces*

$$\Omega_n C_n(a)\Omega_n^* = \operatorname{diag}(\sqrt{n}\,\Omega_n(a)). \tag{8}$$

En particular, los valores propios de $C_n(a)$ son las entradas del vector $\sqrt{n}\,\Omega_n(a)$.

Demostración. Las matrices en ambos lados de (8) tienen el mismo tamaño $n \times n$. Probemos que entrada a entrada las matrices son iguales.

Primero determinamos la entrada (p, q) del producto $\frac{1}{\sqrt{n}} C_n(a)\Omega_n^*$:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(C_n(a)\Omega_n^*)_{p,q} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}(C_n(a))_{p,k}(\Omega_n^*)_{k,q} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(C_n(a))_{p,k}\omega_n^{-qk}$$

separamos la suma en dos partes para aplicar la Definición 12:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{p}(C_n(a))_{p,k}\omega_n^{-qk} + \sum_{k=p+1}^{n-1}(C_n(a))_{p,k}\omega_n^{-qk}\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{p}\omega_n^{-qk}a_{p-k} + \sum_{k=p+1}^{n-1}\omega_n^{-qk}a_{n+p-k}\right).
\end{aligned}$$

Reindizamos las sumatorias de la siguiente forma. En la primera sumatoria ponemos

$$s = p - k, \qquad \text{esto es,} \qquad k = p - s.$$

Cuando k corre de 0 a p, la nueva variable s corre de p a 0:

k	0	1	$\dots$	$p-1$	p
$s = p - k$	p	$p-1$	$\dots$	1	0

En la segunda sumatoria ponemos

$$s = n + p - k, \qquad \text{esto es,} \qquad k = n + p - s.$$

Cuando k corre de $p+1$ a $n-1$, la nueva variable s corre de $n-1$ a $p+1$:

k	$p+1$	$p+2$	$\ldots$	$n-2$	$n-1$
$s=n+p-k$	$n-1$	$n-2$	$\ldots$	$p+2$	$p+1$

Notemos que el orden de los sumandos en sumas finitas no es importante; por ejemplo, la siguiente serie de igualdades siempre se satisface:

$$\sum_{k\in\{p,p-1,\ldots,0\}} A_k = A_p + A_{p-1} + \ldots + A_1 + A_0 = A_0 + A_1 + \ldots + A_{p-1} + A_p = \sum_{k=0}^{p} A_k.$$

De lo anterior se sigue que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{n}}(C_n(a)\Omega_n^*)_{p,q} &= \frac{1}{n}\left(\sum_{s=p}^{0} a_s\omega_n^{-q(p-s)} + \sum_{s=n-1}^{p+1} a_s\omega_n^{-q(n+p-s)}\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{s=0}^{p} a_s\omega_n^{-q(p-s)} + \sum_{s=p+1}^{n-1} a_s\omega_n^{-q(n+p-s)}\right)\\
&= \frac{1}{n}\omega_n^{-qp}\left(\sum_{s=0}^{p} a_s\omega_n^{qs} + \omega_n^{-qn}\sum_{s=p+1}^{n-1} a_s\omega_n^{qs}\right)
\end{aligned}$$

Recordemos que si $r=nk$ con $k\in\mathbb{Z}$, entonces $\omega_n^{nk}=1$; debido a esta propiedad desaparece el factor ω_n^{-qn}, y las dos sumas se pueden unir en una:

$$= \frac{1}{n}\omega_n^{-qp}\sum_{s=0}^{n-1}\omega_n^{qs}a_s.$$

Acabamos de calcular la entrada (p,q) del producto $\frac{1}{\sqrt{n}}C_n(a)\Omega_n^*$:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(C_n(a)\Omega_n^*)_{p,q} = \frac{1}{n}\omega_n^{-qp}\sum_{s=0}^{n-1}\omega_n^{qs}a_s. \tag{9}$$

Segundo determinamos la entrada (p,q) del producto $\frac{1}{\sqrt{n}}\Omega_n C_n(a)\Omega_n^*$:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(\Omega_n C_n(a)\Omega_n^*)_{p,q} = \sum_{k=0}^{n-1}(\Omega_n)_{p,k}\frac{1}{\sqrt{n}}(C_n(a)\Omega_n^*)_{k,q}$$

utilizando la equación 9:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\omega_n^{pk}\right)\left(\frac{1}{n}\omega_n^{-qk}\sum_{s=0}^{n-1}\omega_n^{qs}a_s\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_n^{(p-q)k}\right)\sum_{s=0}^{n-1}\omega_n^{qs}a_s
\end{aligned}$$

por la Proposición 2, la suma sobre k es $\delta_{p,q}$:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{s=0}^{n-1} \omega_n^{qs} a_s \delta_{p,q} = \sum_{s=0}^{n-1} (\Omega_n)_{q,s} a_s \delta_{p,q} \\
&= (\Omega_n a)_q \delta_{p,q} \\
&= (\operatorname{diag}(\Omega_n a))_{p,q},
\end{aligned}
$$

lo que demuestra que entrada a entrada las matrices son iguales. $\square$

15 Definición. Dado un vector $a \in \mathbb{C}^n$, denotemos por P_a a la función polinomial $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida mediante la regla

$$P_a(z) \coloneqq \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k.$$

16 Observación. Muchos autores en vez de $P_a(z)$ escriben $a(z)$. Este convenio es un poco ambigüo, porque el símbolo a ya tiene dos significados:

1) a es una lista de números complejos, es decir, una función $\{1, \ldots, n\} \to \mathbb{C}$;

2) a es una función polinomial $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Sin embargo, esta ambigüedad por lo común no causa conflictos, porque a_j y $a(z)$ se escriben de maneras diferentes.

La función polinomial P_a nos proporciona otra manera de escribir las componentes del vector $\Omega_n a$ y los valores propios de $C_n(a)$:

$$(\sqrt{n}\,\Omega_n a)_j = \sqrt{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\Omega_n)_{j,k} a_k = \sqrt{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \omega_n^{jk} \right) a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega_n^{jk} = P_a(\omega_n^j).$$

De la Proposición 14 obtenemos tres corolarios.

17 Corolario. *Sea $a \in \mathbb{C}^n$. Entonces los valores propios de $C_n(a)$ son los valores del polinomio P_a en las raíces de la unidad:*

$$P_a(\omega_n^j) \qquad (j \in \{0, \ldots, n-1\}).$$

18 Corolario. *Sea $a \in \mathbb{C}^n$. Entonces el determinante de $C_n(a)$ es el producto de los valores del polinomio P_a en las raíces de la unidad:*

$$\det C_n(a) = \prod_{j=0}^{n-1} P_a(\omega_n^j).$$

19 Corolario. *Sea $a \in \mathbb{C}^n$. Entonces la matriz $C_n(a)$ es invertible si y sólo si*

$$\forall j \in \{0, \ldots, n-1\} \qquad P_a(\omega_n^j) \neq 0.$$