Transformada Discreta Cíclica de Fourier

Objetivos. Definir la Transformada Discreta Cíclica de Fourier.

Requisitos. Estos ejercicios usan los conceptos, los hechos y la notación de los temas *Raíces de la unidad*, *Matrices con entradas definidas mediante fórmulas* y *Multiplicación de matrices por vectores*.

En esta sección siempre suponemos que $n \in \{1, 2, \ldots\}$.

Raíces de la unidad (repaso)

1. Notación $\boldsymbol{\omega_n}$ y cálculo de $\boldsymbol{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_6}$. Usamos la notación ω_n del tema *Raíces de la unidad*:

$$\omega_n = \mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{n}\,\mathrm{i}}\,.$$

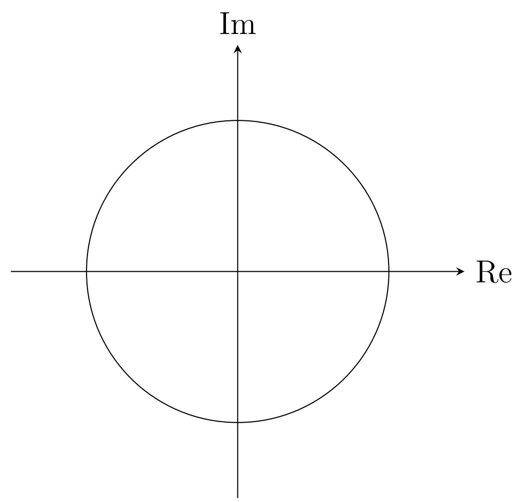
Escriba los números ω_2, ω_3, ω_4, ω_6 en forma polar, esto es, como $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$ para algunos $\varphi \in \mathbb{R}$. Márquelos en la circunferencia unitaria y escríbalos en forma rectangular $x + \mathrm{i}\,y$.

$\omega_2 = \qquad = \qquad ;$

$\omega_3 = \qquad = \qquad ;$

$\omega_4 = \qquad = \qquad ;$

$\omega_6 = \qquad = \qquad ;$



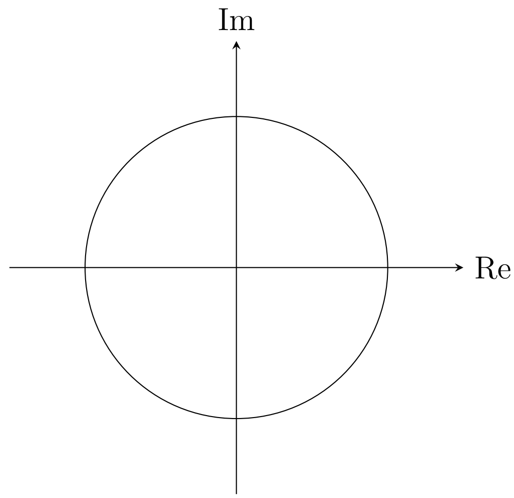
2. ¿Cuándo $\boldsymbol{\omega_n^k = 1}$? Sea $k \in \mathbb{Z}$. Enuncie el criterio:

$$\omega_n^k = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

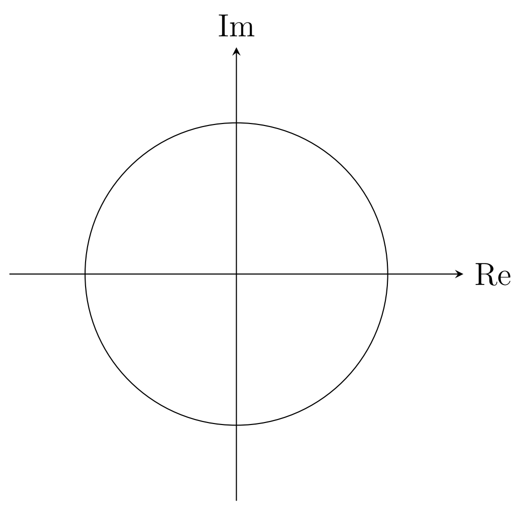
3. ¿Cuándo $\boldsymbol{\omega_n^p = \omega_n^q}$? Sean $p, q \in \mathbb{Z}$. Enuncie el criterio:

$$\omega_n^p = \omega_n^q \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

4. Raíces de la unidad, $n = 4$. En la circunferencia unitaria marque las soluciones de la ecuación $z^4 = 1$ y exprésela a través de ω_4:



5. Raíces de la unidad, $n = 6$. En la circunferencia unitaria marque las soluciones de la ecuación $z^6 = 1$ y exprésela a través de ω_6:



6. Conjunto solución de la ecuación $z^n = 1$. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $z^n = 1$? Escriba el conjunto solución de esta ecuación usando la notación ω_n:

$$\big\{z \in \mathbb{C}\colon\ z^n = 1\big\} = \left\{ \qquad , \qquad , \ \ldots\ , \qquad \right\} = \left\{ \qquad\qquad :\quad j \in \{ \qquad\qquad \} \right\}.$$

Matriz de la Transformada Discreta Cíclica de Fourier

7. Definición (la matriz de la Transformada Discreta Cíclica de Fourier, o simplemente la matriz de Fourier). La matriz F_n se define con la siguiente fórmula:

$$F_n \coloneqq \left[\omega_n^{jk}\right]_{j,k=0}^{n-1}. \tag{1}$$

La fórmula (1) significa lo siguiente:

- F_n es una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$ con entradas complejas:

$$F_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

- Es cómodo numerar los renglones y columnas de esta matriz empezando desde 0.
- Para cualesquiera $j, k \in \{0, \ldots, n-1\}$, la entrada (j, k) de la matriz Ω_n (es decir, la entrada que está en la intersección del renglón j y de la columna k) es igual a ω_n^{jk}:

$$(F_n)_{j,k} = \omega_n^{jk}.$$

8. Matriz de Fourier, $\boldsymbol{n = 2}$. Escriba las entradas de la matriz F_2 primero como potencias de ω_2, luego como números complejos en forma rectangular:

$$F_2 = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}.$$

Notemos que la suma de las entradas del renglón 0 es

$$(F_2)_{0,0} + (F_2)_{0,1} = \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?} = \underbrace{\qquad}_{?},$$

y la suma de las entradas del renglón 1 es

$$(F_2)_{0,0} + (F_2)_{0,1} =$$

9. Matriz de Fourier, $\boldsymbol{n = 3}$. Escriba las entradas de la matriz F_3 aplicando la definición, luego baje algunas potencias usando la igualdad $\omega_3^3 = 1$:

$$F_3 = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}.$$

Notemos que la suma de las entradas del renglón 0 es

$$(F_3)_{0,0} + (F_3)_{0,1} + (F_3)_{0,2} = \qquad\qquad ,$$

la suma de las entradas del renglón 1 es

$$(F_3)_{1,0} + (F_3)_{1,1} + (F_3)_{1,2} = \qquad\qquad ,$$

y la suma de las entradas del renglón 2 es

$$(F_3)_{1,0} + (F_3)_{1,1} + (F_3)_{1,2} = \qquad\qquad .$$

10. Matriz de Fourier, $n = 4$. Escriba las entradas de la matriz F_4 como potencias de ω_4, luego como números complejos en forma rectangular:

$$F_4 = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}.$$

Para cada renglón de F_4 calcule la suma de las entradas.

11. Propiedad simétrica de la matriz F_n. Sea $n \in \{1, 2, \ldots\}$. Demuestre que la matriz F_n es simétrica, esto es,

$$F_n^\top = F_n.$$

Solución. Como F_n es una matriz cuadrada, su transpuesta $F_n^\top$ es del mismo tamaño. Mostremos que para cualesquiera $j, k \in \{0, \ldots, n-1\}$ la entrada (j, k) de la matriz $F_n^\top$ coincide con la entrada (j, k) de la matriz F_n:

$$\left(F_n^\top\right)_{j,k} = \underbrace{\qquad\qquad}_{(F_n)_{???,???}} = \underbrace{\qquad\qquad}_{\omega_n^{???}} = \underbrace{\qquad\qquad}_{\omega_n^{???}} = (F_n)_{j,k}\,. \qquad \square$$

Definición de la Transformada Discreta Cíclica de Fourier

12. Definición (la Transformada Discreta Cíclica de Fourier). Se define $\mathcal{F}_n \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ mediante la regla:

$$\forall a \in \mathbb{C}^n \qquad \mathcal{F}_n(a) \coloneqq \Omega_n a.$$

En otras palabras, aplicar $\mathcal{F}_n$ al vector a es lo mismo que multiplicar la matriz F_n por el vector a.

13. Fórmula para calcular una componente del producto de una matriz por un vector (repaso). Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $v \in \mathbb{C}^n$, entonces Av es un vector de longitud n. Vamos a numerar las entradas de A, v y Av desde el índice 0. Entonces para cualquier $j \in \{1, \ldots, n\}$ la j-ésima componente del vector Av se calcula por la regla

$$(Av)_j = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

14. Fórmula para una componente del vector $\boldsymbol{\mathcal{F}_n(a)}$. Recuerde la fórmula para una componente general de la matriz F_n:

$$(F_n)_{j,k} = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

Sea $a = \left[a_k\right]_{k=0}^{n-1} \in \mathbb{C}^n$. Escriba la fórmula para la j-ésima componente del vector $\mathcal{F}_n(a)$:

$$(\mathcal{F}_n(a))_j = (F_n a)_j = \sum$$

15. Fórmula para el vector $\boldsymbol{\mathcal{F}_n(a)}$. El resultado del ejercicio anterior nos permite escribir el vector $\mathcal{F}_n(a)$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{F}_n(a) = \left[\sum_{k=0}^{n-1} \qquad\qquad\qquad \right]_{j=0}^{n-1}.$$

16. Transformada Discreta Cíclica de Fourier, $n = 2$. Sea $a \in \mathbb{C}^n$ y sea $b = \mathcal{F}_2(a)$. Exprese las componentes del vector b a través de las componentes del vector a:

$$b_0 =$$

$$b_1 =$$

17. Transformada Discreta Cíclica de Fourier, $n = 3$. Sea $a \in \mathbb{C}^n$ y sea $b = \mathcal{F}_3(a)$. Exprese las componentes del vector b a través de las componentes del vector a:

$$b_0 =$$

$$b_1 =$$

$$b_2 =$$

18. Transformada Discreta Cíclica de Fourier, $n = 4$. Sea $a \in \mathbb{C}^n$ y sea $b = \mathcal{F}_4(a)$. Exprese las componentes del vector b a través de las componentes del vector a:

$$b_0 =$$

$$b_1 =$$

$$b_2 =$$

$$b_3 =$$

19. Observación. Como muestra el Ejercicio 16, para $n = 2$ la Transformada Discreta de Fourier calcula la suma y resta de dos variables dadas:

$$s = a + b, \qquad d = a - b.$$

Notemos que a y b se pueden recuperar por las siguientes fórmulas simples:

$$a = \frac{1}{2}(s + d), \qquad b = \frac{1}{2}(s - d).$$

Una pregunta muy natural: ¿cómo generalizar esta transformación a n más grande que 2, para que las fórmulas de inversión sean también muy simples? La mejor respuesta es la Transformada Discreta Cíclica de Fourier.