Núcleo de Dirichlet

Objetivos. Estudiar varias definiciones equivalentes del núcleo de Dirichlet. Estudiar sus propiedades elementales.

Requisitos. Sumas, suma de la progresión geométrica, fórmulas trigonométricas, fórmulas de Euler.

1. Primera definición (por medio de una suma de cosenos). Para cada $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ definimos la función $D_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante la fórmula

$$D_n(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx). \tag{1}$$

2. Gráficas de D_n. Escriba un programa en algún sistema de álgebra computacional (GNU Octave, Sage, Maxima, Python+Numpy, Wolfram Mathematica, MATLAB, etc.) que muestre las gráficas de D_1, D_2 y D_3. Por ejemplo, en MATLAB (o en GNU Octave) puede usar el siguiente programa:

```
xs = -pi:(pi/100):pi;
d1 = 1 + 2 * cos(xs);
d2 = d1 + 2 * cos(2 * xs);
d3 = d2 + 2 * cos(3 * xs);
plot(d1);
plot(d2);
plot(d3);
```

3. Valor en el punto cero. Calcule $D_n(0)$.

4. Periodicidad. Demuestre que para cada $m \in \mathbb{Z}$ y cada $x \in \mathbb{R}$,

$$D_n(x + 2m\pi) = D_n(x).$$

Expresión del núcleo de Dirichlet por medio de una suma de exponenciales con argumentos imaginarios

5. Dos maneras naturales de escribir una suma con índices negativos. Sean $a_{-1}, \ldots, a_{-n}$ algunos números complejos. Entonces su suma $a_{-n} + \cdots + a_{-1}$ se puede escribir como

$$a_{-1} + \cdots + a_{-n} = \sum_{j=1}^{n} a_{-j}. \tag{2}$$

Hagamos el de variable $k = -j$. Cuando j toma los valores $1, 2, \ldots, n$, la variable nueva k toma los valores

$$\underbrace{\qquad}_{?}, \underbrace{\qquad}_{?}, \ldots, \underbrace{\qquad}_{?}.$$

Los escribimos en el orden creciente:

$$\underbrace{\qquad}_{?}, \ldots, \underbrace{\qquad}_{?}, \underbrace{\qquad}_{?}.$$

Por la propiedad conmutativa de la adición en $\mathbb{C}$, el orden de los sumandos no es importante, por eso la suma (2) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\sum_{k=???}^{???} a_{???}.$$

6. Segunda definición del núcleo de Dirichlet. Demuestre que

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}. \tag{3}$$

Deducción de una fórmula simple para el núcleo de Dirichlet: camino complejo

Vamos a deducir una "fórmula cerrada" (sin $\sum$, sin recursiones) para la función $D_n(x)$. Veremos dos métodos: el "camino complejo" y el "camino real".

7. Recuerde la fórmula para la progresión geométrica (con $q \neq 1$):

$$\sum_{k=0}^{m} q^k = \frac{???}{???}. \tag{4}$$

8. Un truco para trabajar con exponenciales imaginarias. A menudo es útil la siguiente transformación:

$$1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x/2}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x/2}\right) = \underbrace{\qquad}_{?}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x/2}\,\mathrm{sen}\Bigl(\underbrace{\quad}_{?}\Bigr).$$

9. Escriba $D_n(x)$ en forma (3), redúzcala a una progresión geométrica:

$$D_n(x) = \underbrace{\qquad}_{?}\sum_{k=0}^{???}\underbrace{\qquad}_{?},$$

aplique la fórmula (4). En el numerador y en el denominador de la fracción obtenida aplique el truco explicado en el Ejercicio 8.

Deducción de una fórmula simple para el núcleo de Dirichlet: camino real

10. Recuerde o deduzca de alguna manera la fórmula para el siguiente producto:

$$2\cos(\alpha)\,\mathrm{sen}(\beta) = \mathrm{sen}\big(\underbrace{\qquad\quad}_{?}\big) + \mathrm{sen}\big(\underbrace{\qquad\quad}_{?}\big). \tag{5}$$

11. Escriba $D_3(x)$ en forma (1), multiplique ambos lados por $\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}$, transforme los productos por la fórmula (5), simplifique la suma obtenida y despeje $D_3(x)$.

12. Generalice los cálculos del ejercicio anterior a n natural.

13. Analice para cuáles valores de x es válida la fórmula para $D_n(x)$ deducida en los ejercicios anteriores. Calcule el límite de $D_n(x)$ cuando x tiende a los puntos donde se anula el denominador.