Multiplicación de los polinomios via la Transformada Discreta de Fourier y su inversa

Objetivos. Aplicar la transformada rápida de Fourier para multiplicar polinomios.

Requisitos. Transformada discreta de Fourier, transformada rápida de Fourier, interpolación polinomial.

Transformada discreta de Fourier (repaso)

1. Raíces de la unidad.
Sea
$$\omega_n = \mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{n}\,\mathrm{i}}.$$
Entonces los números
$$\omega_n^0, \omega_n^1, \ldots, \omega_n^{n-1}$$
son diferentes y forman el conjunto solución de la ecuación $z^n = 1$.

2. Transformada discreta de Fourier.
La transformada de Fourier $\mathcal{F}_n \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ se define mediante la siguiente fórmula:
$$\mathcal{F}_n(a) = \left[\sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega_n^{kj} \right]_{j=0}^{n-1}.$$

3. Transformada inversa a la transformada discreta de Fourier.
Se puede demostrar que $\mathcal{F}_n$ es invertible y
$$\mathcal{F}_n^{-1}(b) = \frac{1}{n} \left[\sum_{j=0}^{n-1} b_j \omega_n^{-kj} \right]_{k=0}^{n-1}.$$

4. Transformada rápida de Fourier.
Existen algoritmos de complexidad $\mathcal{O}(n \log(n))$ para calcular $\mathcal{F}_n(x)$ y $\mathcal{F}_n^{-1}(y)$.

Interpolación polinomial (repaso)

5. Teorema de la existencia y unicidad del polinomio interpolante.
Sean $z_0, \ldots, z_{n-1} \in \mathbb{C}$ puntos diferentes y sean $v_0, \ldots, v_{n-1} \in \mathbb{C}$. Demuestre que existe un único polinomio P de grado $\le n-1$ tal que $P(z_k) = v_k$ para todo $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

6. Cálculo del polinomio interpolante.
Recuerde algunos algoritmos para calcular el polinomio interpolante P del ejercicio anterior.

7. ¿Cuántos puntos son necesarios para interpolar un polinomio de grado *d*?.
Sean $z_0, \ldots, z_{n-1} \in \mathbb{C}$ puntos diferentes y sean $v_0, \ldots, v_{n-1} \in \mathbb{C}$. Supongamos que existe un único polinomio P de grado $\le d$ tal que $P(z_k) = v_k$ para todo $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. ¿Cuál es la relación entre n y d?.

Transformada discreta de Fourier escrita en términos de los polinomios

8. Transformada discreta de Fourier como valores de un polinomio en las raíces de la unidad.
Dado un vector $a \in \mathbb{C}^n$ definimos el polinomio P_a:

$$P_a(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k.$$

¿Qué se puede decir acerca del grado del polinomio P_a?.

$$\deg(P_a) \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$$

Exprese $\mathcal{F}_n(a)$ en términos del polinomio P_a:

$$\mathcal{F}_n(a) = \Big[\underbrace{\qquad\qquad}_{?} \Big]_{j=0}^{n-1}.$$

9. Calcular los coeficientes de un polinomio si están dados sus valores en las raíces de la unidad.
Sea P un polinomio de grado $\leq n-1$:

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k.$$

Denotemos por b_j $(j \in \{0, 1, ldots, n-1\})$ sus valores en las raíces de la unidad:

$$b_j = P(\omega_n^j).$$

Exprese los coeficientes a_k a través de b_j.

10. Sugerencias.

- Si P y Q son algunos polinomios de grado $\leq n-1$, entonces ¿de qué grado será el polinomio PQ?.
- ¿Cuántos puntos diferentes se necesitan para determinar PQ de manera única?.

11. Multiplicación de los polinomios via la Transformada Discreta de Fourier y su inversa.
Proponga un algoritmo para multiplicar dos polinomios dados P y Q. Suponga que $\deg(P) \leq n-1$, $\deg(Q) \leq n-1$.