Matriz de la Transformada Discreta de Coseno de tipo II y su propiedad ortogonal

Los autores de estos apuntes son: Issis Fragoso Martínez, Egor Maximenko.

Herramienta auxiliar: fórmulas para sumas de cosenos

1 Proposición (fórmula para el núcleo de Dirichlet)**.** *Sea* $\theta \in \mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z})$*. Entonces*

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta) = \frac{\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}. \tag{1}$$

Demostración. Primero escribimos la suma original en la forma compleja:

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\theta},$$

luego factorizamos $e^{-in\theta}$ y aplicamos la fórmula para la suma parcial de la serie geométrica:

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\theta} = e^{-in\theta}\sum_{k=0}^{2n} e^{ik\theta} = e^{-in\theta}\frac{(e^{i\theta})^{2n+1} - 1}{e^{i\theta} - 1}$$

y trabajando con exponenciales regresamos a funciones trigonométricas:

$$\begin{aligned} &= \frac{e^{-i(n+1)\theta/2}}{e^{-i\theta/2}}\,\frac{e^{(2n+1)i\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{e^{i(2n+1)\theta/2} - e^{-i(2n+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}} \\ &= \frac{2i\,\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}}{2i\,\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$

□

2 Corolario. *Sea* $m \in \mathbb{Z}$ *tal que* $0 < |m| < 2n$*. Entonces*

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} \cos\frac{km\pi}{n} = (-1)^{m+1}. \tag{2}$$

Demostración. Primero aplicamos (1) con $\alpha = \frac{m\pi}{n}$:

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} \cos\frac{km\pi}{n} = \frac{\sin\frac{(2n-1)m\pi}{2n}}{\sin\frac{m\pi}{2n}}.$$

Luego notamos que

$$\frac{(2n-1)m\pi}{2n)} = m\pi - \frac{m\pi}{2n},$$

usamos las fórmulas $\sin(m\pi + \beta) = (-1)^m \sin(\beta)$ y $\sin(-\beta) = -\sin(\beta)$:

$$\frac{\sin\frac{(2n-1)m\pi}{2n}}{\sin\frac{m\pi}{2n}} = \frac{\sin\left(m\pi - \frac{m\pi}{2n}\right)}{\sin\frac{m\pi}{2n}} = \frac{(-1)^{m+1}\sin\frac{m\pi}{2n}}{\sin\frac{m\pi}{2n}} = (-1)^{m+1}.$$

□

Matriz de la Transformada Discreta de Coseno de tipo II

En este tema es cómodo empezar los índices de renglones y columnas de matrices desde cero.

3 Definición. Denotemos por C_n a la matriz de la *Transformada Discreta de Coseno* del tipo II, cuya entrada (j,k) está definida por la siguiente regla:

$$(C_n)_{j,k} = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{n}}, & \text{si} \quad j = 0; \\ \sqrt{\frac{2}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{n}(k+\frac{1}{2})j\right), & \text{si} \quad j \geq 1. \end{cases}$$

4 Ejemplo.

$$C_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}.$$

5 Proposición. *La matriz C_n es ortogonal, esto es, $C_n^\top C_n = I_n$.*

Demostración.

$$\begin{aligned} (C_n^\top C_n)_{p,q} &= \sum_{k=0}^{n-1} (C_n^\top)_{p,k} (C_n)_{k,q} = \sum_{k=0}^{n-1} (C_n)_{k,p} (C_n)_{k,q} \\ &= (C_n)_{0,p}(C_n)_{0,q} + \sum_{k=1}^{n-1} (C_n)_{k,p}(C_n)_{k,q} \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\left(p+\frac{1}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{k\pi}{n}\left(q+\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\left(p-q\right)\right) + \cos\left(\frac{k\pi}{n}\left(p+q+1\right)\right)\right) \\ &= \frac{1}{2n}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} \cos\frac{k(p-q)\pi}{n} + 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} \cos\frac{k(p+q+1)\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

Analicemos el caso donde $p \neq q$ con ayuda del Corolario 2:

$$(C_n^\top C_n)_{p,q} = \frac{1}{2n}\left((-1)^{p-q+1} + (-1)^{p+q+2}\right) = \frac{(-1)^{p-q+1}}{2n}\left(1 + (-1)^{2q+1}\right) = 0.$$

En el caso $p = q$ los sumandos de la primera suma son constantes, y para la segunda otra vez aplicamos el Corolario 2:

$$(C_n^\top C_n)_{p,p} = \frac{1}{2n}\left(1 + 2(n-1) + (-1)^{p+p+2}\right) = \frac{1}{2n}\left(1 + 2n - 2 + 1\right) = 1. \qquad \square$$