Condición de la raíz para la convergencia de series

Objetivos. Demostrar el teorema de Cauchy sobre la convergencia de series de números positivos en términos del comportamiento de la raíz

$$\sqrt[k]{a_k}.$$

Prerrequisitos. Convergencia de series de números positivos, comparación de dos series de números positivos, el límite superior de una sucesión.

Aplicaciones. Convergencia de series de potencias.

Teorema 1. *Sea* $a \in [0, +\infty)^{\mathbb{N}_0}$ *y sea*

$$L := \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}.$$

1. Si $L < 1$*, entonces* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty$.

2. Si $L > 1$*, entonces* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty$.

Demostración. Definimos $b \in [0, +\infty]^{\mathbb{N}_0}$,

$$b_m := \sup_{k\geq m} \sqrt[k]{a_k}.$$

Notemos que

$$L = \inf_{m\in\mathbb{N}_0} \sup_{k\geq m} \sqrt[k]{a_k} = \inf_{m\in\mathbb{N}_0} b_m.$$

1. Supongamos que $L < 1$. Pongamos

$$w := \frac{L+1}{2}.$$

Entonces, $L < w < 1$. Por la definición del ínfimo, existe m en $\mathbb{N}_0$ tal que $b_m < w$, esto es,

$$\sup_{k\geq m} \sqrt[k]{a_k} < w.$$

En particular, esto implica que

$$\forall k \geq m \qquad a_k \leq w^k.$$

Como la serie $\sum_{k=0}^{\infty} w^k$ converge, concluimos que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge.

2. Supongamos que $L > 1$. Como

$$\lim_{m\to\infty} b_m = L > 1,$$

existe n en $\mathbb{N}_0$ tal que

$$\forall m \geq n \qquad b_m > 1.$$

Por la definición del supremo, esto implica que

$$\forall m \in n \qquad \exists k \geq m \qquad a_k \geq 1.$$

Por lo tanto, la sucesión a no converge al cero, y la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ no puede converger. $\square$