El radio de convergencia de una serie de potencias

Objetivos. Demostrar el teorema de Cauchy–Hadamard sobre la convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k.$$

Prerrequisitos. Condición de la raíz para la convergencia de una serie de números positivos, convergencia absoluta de series de números complejos.

Observación 1 (repaso)**.** Sea $u \in [0,+\infty)^{\mathbb{N}_0}$ y sea

$$L \coloneqq \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{u_k}.$$

1. Si $L < 1$, entonces $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} u_k < +\infty$.
2. Si $L > 1$, entonces u_k no tiende a cero.

Teorema 2 (Cauchy–Hadamard)**.** *Sea $c \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ y sea $a \in \mathbb{C}$. Pongamos*

$$L \coloneqq \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}, \qquad R \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{L}, & 0 < L < +\infty; \\ 0, & L = +\infty; \\ +\infty, & L = 0. \end{cases}$$

1. Para cada z en $\mathbb{C}$ tal que $|z-a| < R$, la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ converge absolutamente.

2. Para cada z en $\mathbb{C}$ tal que $|z-a| > R$, la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ no converge.

Demostración. Para cualquier z en $\mathbb{C}$, pongamos

$$M \coloneqq \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k(z-a)^k|}.$$

Por las propiedades del límite superior,

$$M = |z-a|\,L.$$

1. Si $|z-a| < R$, entonces $M = |z-a|\,L < 1$, y la serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ converge de manera absoluta.

2. Si $|z-a| > R$, entonces $M = |z-a|\,L > 1$, y la serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ no converge. □

Corolario 3. *En las condiciones del Teorema 2, supongamos que* $z \in \mathbb{C}$ *y la serie converge en el punto* z. *Entonces,* $|z-a| \le R$, *es decir,* $L\,|z-a| \le 1$.

Demostración. En efecto, en la segunda parte del teorema vimos que si $|z-a| > R$, entonces la serie no converge. □

Observación 4. Recordemos el teorema de Weierstrass sobre la convergencia uniforme de series de funciones. Si X es un conjunto, $(g_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ es una sucesión de funciones acotadas $X \to \mathbb{C}$, y

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|g_k\|_{\sup} < +\infty,$$

entonces la serie $\sum_{k=0}^{\infty} g_k$ converge de manera uniforme a una función.

Corolario 5. *En las condiciones del Teorema 2, si* $0 < r < R$, *entonces la serie converge de manera uniforme en el disco cerrado* $X \coloneqq \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z-a| \le r\}$.

Demostración. Para cada k en $\mathbb{N}_0$, consideremos la función

$$g_k(z) \coloneqq c_k (z-a)^k \qquad (z \in X).$$

Esta función pertenece al espacio $C(X)$, y su norma-supremo se acota de la siguiente manera:

$$\|g_k\|_{\sup} \coloneqq \sup_{z\in X} |g_k(x)| \le |c_k| r^k.$$

Como

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k| r^k} = r\,\frac{1}{R} < 1,$$

por la “prueba de la raíz”, concluimos que la siguiente serie converge:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| r^k.$$

Luego, por el teorema de Weierstrass, la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_k$$

converge de manera uniforme en X. □