Condición del cociente
para la convergencia de series

Objetivos. Demostrar el teorema de d'Alembert sobre la convergencia de series de números positivos en términos del comportamiento del cociente

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}.$$

Prerrequisitos. Convergencia de series de números positivos, comparación de dos series de números positivos, el límite superior y el límite inferior de una sucesión.

Aplicaciones. Convergencia de series de potencias.

Teorema 1. *Sea* $a \in (0, +\infty)^{\mathbb{N}_0}$ *y sea*

$$u \coloneqq \limsup_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}.$$

Si $u < 1$, *entonces* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty$.

Demostración. Supongamos que $u < 1$. Pongamos

$$b_m \coloneqq \sup_{k\geq m} \frac{a_{k+1}}{a_k}.$$

Recordemos que

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \inf_{m\in\mathbb{N}_0} \sup_{k\geq m} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \inf_{m\in\mathbb{N}_0} b_m.$$

Sea $w \in (u, 1)$. Por ejemplo, podemos poner

$$w \coloneqq \frac{u+1}{2}.$$

Por la definición del ínfimo, existe m en $\mathbb{N}_0$ tal que $b_m < w$. Por lo tanto,

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \qquad \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq w.$$

Razonando por inducción matemática sobre k, con $k \geq m$, es fácil ver que

$$\forall k \geq m \qquad a_k \geq a_m w^m.$$

Como $\displaystyle\sum_{k=m}^{\infty} a_m w^m < +\infty$, concluimos que $\displaystyle\sum_{k=m}^{\infty} a_k < +\infty$ y $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty$. □

Teorema 2. *Sea* $a \in (0, +\infty)^{\mathbb{N}_0}$ *y sea*

$$v \coloneqq \liminf_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}.$$

Si $v > 1$, *entonces* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty$.

Ejercicio 3. Demostrar el teorema.