

El principio de módulo máximo para las funciones holomorfas (un caso particular)

Objetivos. Demostrar el principio de módulo máximo para las funciones holomorfas y sus valores en las circunferencias.

Prerrequisitos. La identidad de Parseval para las funciones analíticas. Equivalencia entre las funciones holomorfas y analíticas.

Teorema 1 (la identidad de Parseval para las series de potencias, repaso). Sea $c \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ y sea $a \in \mathbb{C}$. Denotemos por R el radio de convergencia de la siguiente serie de potencias y por f su suma:

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k \quad (|z - a| < R). \quad (1)$$

Entonces, para cada r que satisface $0 < r < R$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 r^{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + r e^{i\vartheta})|^2 d\vartheta. \quad (2)$$

Teorema 2 (el principio de módulo máximo). Sean Ω un conjunto abierto conexo en $\mathbb{C}$, $f \in H(\Omega)$, $a \in \Omega$, $r > 0$ tal que $a + r \operatorname{cl}(\mathbb{D}) \subseteq \Omega$,

$$M := \max_{\vartheta \in [0, 2\pi]} |f(a + r e^{i\vartheta})|.$$

Entonces, $|f(a)| \leq M$. Más aún, si $|f(a)| = M$, entonces f es una constante en Ω .

Demostración. Sea $R_1 := d(a, \mathbb{C} \setminus \Omega)$. Como f es analítica en Ω , f admite una expansión en series de potencias en el disco $a + R_1 \mathbb{D}$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k \quad (|z - a| < R_1).$$

Sea R el radio de la convergencia de esta serie de potencias. Como $a + r \operatorname{cl}(\mathbb{D}) \subseteq \Omega$, concluimos que

$$r < R_1 \leq R.$$

Aplicamos (2) y acotamos la integral usando la cota superior de la función:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 r^{2k} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + r e^{i\vartheta})|^2 d\vartheta \leq M^2.$$

En particular,

$$|f(a)|^2 = |c_0|^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 r^{2k} \leq M^2.$$

Si $|f(a)| = M$, entonces concluimos que $c_k = 0$ para cada k en $\mathbb{N}$. Entonces, f es una constante en el disco $a + R_1\mathbb{D}$. Por el principio de unicidad, concluimos que f es una constante en la región Ω . $\square$

Corolario 3 (el principio del módulo mínimo). *Supongamos que se cumplen las condiciones del Teorema 2 y f no tiene ceros en $a + r\mathbb{D}$. Entonces,*

$$|f(a)| \geq \min_{\vartheta \in [0, 2\pi]} |f(a + r e^{i\vartheta})|. \quad (3)$$

Demostración. Si f se anula en un punto de la circunferencia $a + r\mathbb{T}$, entonces la desigualdad es obvia. Supongamos que f no se anula en $a + r\mathbb{T}$. Entonces, f no se anula en $a + r \operatorname{cl}(\mathbb{D})$. Denotemos por v al ínfimo de los valores de $|f|$ en $a + r \operatorname{cl}(\mathbb{D})$:

$$v := \inf_{z \in a + r \operatorname{cl}(\mathbb{D})} |f(z)|.$$

Como $a + r \operatorname{cl}(\mathbb{D})$ es un compacto y $|f|$ es continua, $|f|$ alcanza este valor v , es decir, existe un punto z_1 en $a + r \operatorname{cl}(\mathbb{D})$ tal que $|f(z_1)| = v$. Concluimos que $v > 0$.

Sea $R_1 := d(a, \mathbb{C} \setminus \Omega)$. Por la continuidad uniforme de f , existe $\delta > 0$ tal que si $|z - w| < \delta$, entonces $|f(z) - f(w)| < v$. Encontramos r_1 tal que $r_1 > r$, $r_1 < r + \delta$ y $r_1 < R_1$. Por ejemplo,

$$r_1 := \min \left\{ r + \frac{\delta}{2}, \frac{r + R_1}{2} \right\}.$$

En particular, esto garantiza que $a + r_1\mathbb{D} \subseteq \Omega$. Más aún, para cada z en $a + r_1\mathbb{D}$ existe w en $a + r \operatorname{cl}(\mathbb{D})$ tal que $|w - z| < \delta$, y

$$|f(z)| \geq |f(w)| - |f(w) - f(z)| > v - v = 0.$$

Hemos demostrado que f no se anula en el disco $a + r_1\mathbb{D}$. Definimos $g: a + r_1\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$g(z) := \frac{1}{f(z)}.$$

Como g es holomorfa, podemos aplicar el Teorema 2 a la función g :

$$|g(a)| \leq \max_{\vartheta \in [0, 2\pi]} |g(a + r e^{i\vartheta})|.$$

Es fácil ver que

$$\max_{\vartheta \in [0, 2\pi]} |g(a + r e^{i\vartheta})| = \frac{1}{\min_{\vartheta \in [0, 2\pi]} |f(a + r e^{i\vartheta})|}.$$

De allí obtenemos el resultado. $\square$