

Invertibilidad local de funciones holomorfas

Objetivos. Demostrar que las funciones holomorfas no constantes convierten conjuntos abiertos en conjuntos abiertos. Más aún, si f' no se anula en algún punto z_0 , entonces f es invertible en alguna vecindad de z_0 , y si $f - f(z_0)$ tiene cero de orden m , entonces $f - f(z_0)$ se puede representar como la m -ésima potencia de una función holomorfa e invertible en una vecindad de z_0 .

Prerrequisitos. Funciones holomorfas, equivalencia entre las funciones holomorfas y funciones analíticas, la estructura de ceros de funciones holomorfas, el principio del valor mínimo para las funciones holomorfas.

Proposición 1. Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, y sea $f \in H(\Omega)$. Sean $z, w \in \Omega$ tales que $\text{conv}(z, w) \subseteq \Omega$. Entonces,

$$f(z) - f(w) = (z - w) \int_0^1 f'((1-t)z + tw) dt.$$

Demostración. Sabemos que g' es continua. Consideremos $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ y $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\gamma(t) := (1-t)z + tw, \quad h(t) := f(\gamma(t)).$$

Entonces,

$$h'(t) = f'(\gamma(t)) \gamma'(t) = f'(\gamma(t)) (z - w).$$

Como h' es continua, podemos aplicar el segundo teorema fundamental del cálculo a la función h :

$$f(z) - f(w) = h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(t) dt = (z - w) \int_0^1 f'((1-t)z + tw) dt. \quad \square$$

Proposición 2. Sea Ω un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$, y sea $f \in H(\Omega)$. Definimos $g: \Omega^2 \rightarrow \Omega$,

$$g(z, w) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w}, & z \neq w; \\ f'(z), & z = w. \end{cases}$$

Entonces, g es continua.

Demostración. Si $a \neq b$, entonces la continuidad en (a, b) es fácil. Para demostrar la continuidad en (a, b) , aplicar la Proposición 1. $\square$

Teorema 3 (sobre la invertibilidad local de funciones holomorfas, cuando la derivada no se anula). Supongamos que Ω un conjunto abierto y conexo, $f \in H(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ y $f'(z_0) \neq 0$. Entonces, existe una vecindad abierta V del punto z_0 tal que

- φ es inyectiva en V ,
- $W := \varphi[V]$ es abierto,
- la función $\psi: W \rightarrow V$, definida como la inversa de $\varphi|_V^W$, es holomorfa en W .

Proposición 4. Sea Ω un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$ y sea $f \in H(\Omega)$ tal que $f'(z) = 0$ en Ω . Entonces, f es una constante.

Demostración. 1. Sean $a, b \in \Omega$ tales que $\text{conv}(a, b) \subseteq \Omega$. Definimos $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\gamma(t) := (1 - t)a + tb,$$

y definimos $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $h(t) := f(\gamma(t))$. Entonces, h es derivable, y su derivada es cero:

$$h'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t) = 0.$$

Por el segundo teorema fundamental del cálculo,

$$h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(t) dt = 0,$$

esto es, $f(b) = f(a)$.

2. Si $a \in \Omega$, entonces existe $r > 0$ tal que $D(a, r) \subseteq \Omega$. Como $D(a, r)$ es convexo, para todos los puntos de $D(a, r)$ obtenemos $f(b) = f(a)$.

3. Fijamos $z_0 \in \Omega$ y pongamos

$$A := \{z \in \Omega: f(z) = f(z_0)\}.$$

Como f es continua, A es cerrado. Por la segunda parte de la demostración, A es abierto. Como $z_0 \in A$ y Ω es conexo, concluimos que $\Omega = A$. $\square$

Teorema 5. Sea Ω un conjunto abierto y conexo y sea $f \in H(\Omega)$. Supongamos que f no es constante. Sea $z_0 \in \Omega$. Pongamos $w_0 := f(z_0)$. Denotemos por m al orden del cero de la función $f - w_0$ en el punto z_0 . Entonces, existen una vecindad abierta V del punto z_0 , una función $\varphi \in H(V)$ y un número $r > 0$ con las siguientes propiedades:

$$f(z) = w_0 + \varphi(z)^m \quad (z \in V),$$

φ' no se anula en V y φ es un biholomorfismo $V \rightarrow D(0, r)$.

Demostración. 1. Primero, elegimos $\Omega_1 \subseteq \Omega$ tal que Ω_1 es abierto y convexo, $z_0 \in \Omega_1$ y $f(z) \neq w_0$ para cada z en $\Omega_1 \setminus \{z_0\}$. Representamos f en la forma

$$f(z) - w_0 = (z - z_0)^m g(z) \quad (z \in \Omega_1),$$

donde $g \in H(\Omega_1)$ y g no tiene ceros en Ω_1 . Entonces, $g'/g \in H(\Omega_1)$. Por lo tanto, existe $\alpha \in H(\Omega_1)$ tal que

$$\frac{g'}{g} = \alpha'.$$

Definimos $\beta \in H(\Omega_1)$,

$$\beta(z) := g(z) \exp(-\alpha(z)).$$

Entonces,

$$\beta'(z) = g'(z) \exp(-\alpha(z)) + g(z) \exp(-\alpha(z))(-\alpha'(z)) = 0 \quad (z \in \Omega_1).$$

Por la Proposición 4, $\beta(z) = \beta(z_0)$ para cada z en Ω_1 .

Notamos que $\beta(z_0) \neq 0$. Encontramos c en $\mathbb{C}$ tal que

$$\exp(c) = \beta(z_0).$$

Definimos $h: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{C}$,

$$h(z) := \alpha(z) + c.$$

Entonces, para cada z en Ω_1 ,

$$\begin{aligned} g(z) &= \beta(z) \exp(\alpha(z)) = \beta(z_0) \exp(\alpha(z)) = \exp(c) \exp(\alpha(z)) \\ &= \exp(\alpha(z) + c) = \exp(h(z)). \end{aligned}$$

2. Definimos $\psi: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\psi(z) := (z - z_0) \exp\left(\frac{h(z)}{m}\right).$$

Entonces, para cada z en Ω_1 ,

$$\psi(z)^m = (z - z_0)^m \exp(h(z)) = f(z) - w_0.$$

Además,

$$\psi'(z) = \exp\left(\frac{h(z)}{m}\right) + (z - z_0) \exp\left(\frac{h(z)}{m}\right) \frac{h'(z)}{m}.$$

Por lo tanto, $\psi'(z_0) = 0$.

3. Luego, se puede elegir una vecindad abierta W del punto z_0 tal que $\psi'|_W$ no se anula, ψ es inyectiva en W , y $\psi(W)$ contiene un disco de la forma $D(w_0, r)$, con $r > 0$. Pongamos $V := \psi^{-1}[D(w_0, r)]$ y definimos $\varphi := \psi|_V$. Entonces, φ tiene las propiedades requeridas. $\square$

Teorema 6. *Supongamos que Ω es un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$, $f \in H(\Omega)$, y f es inyectiva. Entonces, $f'(z) \neq 0$ para cada z en Ω , y la inversa de f también es holomorfa.*

Demostración. Si $f'(z_0) = 0$ para algún z_0 en Ω , entonces f no es inyectiva en una vecindad de z_0 . $\square$