

Coseno y seno hiperbólico de un argumento real

(ejercicios)

Objetivos. Estudiar propiedades de las funciones ch y sh con dominio $\mathbb{R}$.

Requisitos. Definición de las funciones hiperbólicas ch y sh , derivada y monotonía de funciones, propiedades de la función exponencial.

1. Definición del coseno y seno hiperbólico de un argumento real. En esta sección tratamos ch y sh como funciones de argumentos reales:

$$\text{ch}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{ch}(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$\text{sh}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{sh}(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

2. Paridad. Recuerde las fórmulas: $\text{ch}(-x) = \underbrace{\hspace{1.5cm}}_?$, $\text{sh}(-x) = \underbrace{\hspace{1.5cm}}_?$.

Esto significa que ch es una función $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{par/impar}}$, sh es una función $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{par/impar}}$.

3. Ceros. Encuentre todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que $\text{ch}(x) = 0$. Encuentre todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que $\text{sh}(x) = 0$.

4. Signos. Resuelva cada una de las desigualdades (puede usar el resultado del ejercicio anterior y el teorema del valor intermedio):

$$\text{ch}(x) > 0, \quad \text{ch}(x) < 0, \quad \text{sh}(x) > 0, \quad \text{sh}(x) < 0.$$

Primeras derivadas y monotonía

5. Derivada de la función exponencial (repaso).

Se sabe que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$(e^x)' = \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{?}, \quad (e^{-x})' = \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{?}.$$

6. Calcule las derivadas de ch y de sh:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}'(z) &= \left(\frac{\hspace{1.5cm}}{2} \right)' = \\ \operatorname{sh}'(z) &= \left(\frac{\hspace{1.5cm}}{2} \right)' = \end{aligned}$$

7. Puntos donde se anulan las derivadas de ch y sh.

Encuentre todos los puntos $x \in \mathbb{R}$ tales que $\operatorname{ch}'(x) = 0$.

Encuentre todos los puntos $x \in \mathbb{R}$ tales que $\operatorname{sh}'(x) = 0$.

8. Intervalos de monotonía de ch y sh. Encuentre intervalos donde $\operatorname{ch}' > 0$; donde $\operatorname{ch}' < 0$; donde $\operatorname{sh}' > 0$; donde $\operatorname{sh}' < 0$. Basándose en estos resultados encuentre intervalos donde ch crece; ch decrece; sh crece; sh decrece.

Segundas derivadas y convexidad

9. Calcule las segundas derivadas de ch y sh :

$$\operatorname{ch}'' = \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{?}, \quad \operatorname{sh}'' = \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{?}.$$

10. Encuentre todos los puntos $x \in \mathbb{R}$ tales que $\operatorname{ch}''(x) = 0$. Encuentre todos los puntos $x \in \mathbb{R}$ tales que $\operatorname{sh}''(x) = 0$.

11. Encuentre intervalos donde $\operatorname{ch}'' > 0$; donde $\operatorname{ch}'' < 0$; donde $\operatorname{sh}'' > 0$; donde $\operatorname{sh}'' < 0$. Recuerde cómo está relacionado el signo de la segunda derivada de una función con su convexidad.

12. Convexidad y signo de la segunda derivada.

Indique correspondencias con flechas ($\rightarrow$):

$$f'' \geq 0$$

f es convexa $\cup$

$$f'' \leq 0$$

f es cóncava $\cap$

Límites en $+\infty$ y en $-\infty$

13. Comportamiento de $\exp$ cerca de $+\infty$ y $-\infty$ (repaso).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = \underbrace{\hspace{1cm}}_{?} \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = \underbrace{\hspace{1cm}}_{?}$$

14. Usando la información del ejercicio anterior calcule los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(2x) = \underbrace{\hspace{1cm}}_{?} \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(-x) = \underbrace{\hspace{1cm}}_{?} \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(-2x) = \underbrace{\hspace{1cm}}_{?}$$

15. Para calcular el límite de $\operatorname{ch}(x)$ cuando $x \rightarrow +\infty$ recuerde su definición (en términos de la función exponencial) y factorice el término mayor en el numerador:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{ch}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\hspace{1cm}}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x (1 + \hspace{1cm})}{2} = \underbrace{\hspace{1cm}}_{?}.$$

16. De manera similar calcule el límite de $\operatorname{sh}(x)$ cuando $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sh}(x) =$$

17. Para calcular el límite de $\operatorname{ch}(x)$ cuando $x \rightarrow -\infty$ haga el cambio de variables $y = -x$ y use el hecho que ch es una función $\underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{par/impar}}$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{ch}(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \operatorname{ch}(-y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \underbrace{\hspace{1cm}}_{?} = \underbrace{\hspace{1cm}}_{?}.$$

18. El límite de $\operatorname{sh}(x)$ cuando $x \rightarrow -\infty$ se calcula de manera similar usando el hecho que sh es una función $\underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{par/impar}}$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sh}(x) =$$

Valores en los puntos $0, \pm 1, \pm 2$

Se sabe que

$$\begin{aligned}\exp(1) &\approx 2.72, & \exp(2) &\approx 7.39, \\ \exp(-1) &\approx 0.37, & \exp(-2) &\approx 0.14.\end{aligned}$$

19. Calcule los valores de ch en los puntos $0, 1, 2$. Para calcular sus valores en los puntos $-1, -2$ use el hecho que ch es una función $\underbrace{\hspace{2cm}}$.
par/impar

$$\text{ch}(0) = \frac{\quad}{2} = \underbrace{\hspace{1cm}}_{?};$$

$$\text{ch}(1) \approx \frac{2.72 + 0.37}{2} = \frac{3.09}{2} \approx 1.54; \quad \text{ch}(-1) \approx \underbrace{\hspace{1cm}}_{?};$$

$$\text{ch}(2) \approx \frac{\quad}{2} = \frac{\quad}{2} \approx \underbrace{\hspace{1cm}}_{?}; \quad \text{ch}(-2) \approx$$

20. Calcule los valores de sh en los puntos $0, 1, 2, 3$. Luego calcule sus valores en los puntos $-1, -2, -3$ usando el hecho que sh es una función $\underbrace{\hspace{2cm}}$.
par/impar

$$\text{sh}(0) = \quad = \underbrace{\hspace{1cm}}_{?};$$

$$\text{sh}(1) \approx \quad = \quad \approx \underbrace{\hspace{1cm}}_{?}; \quad \text{sh}(-1) \approx \underbrace{\hspace{1cm}}_{?};$$

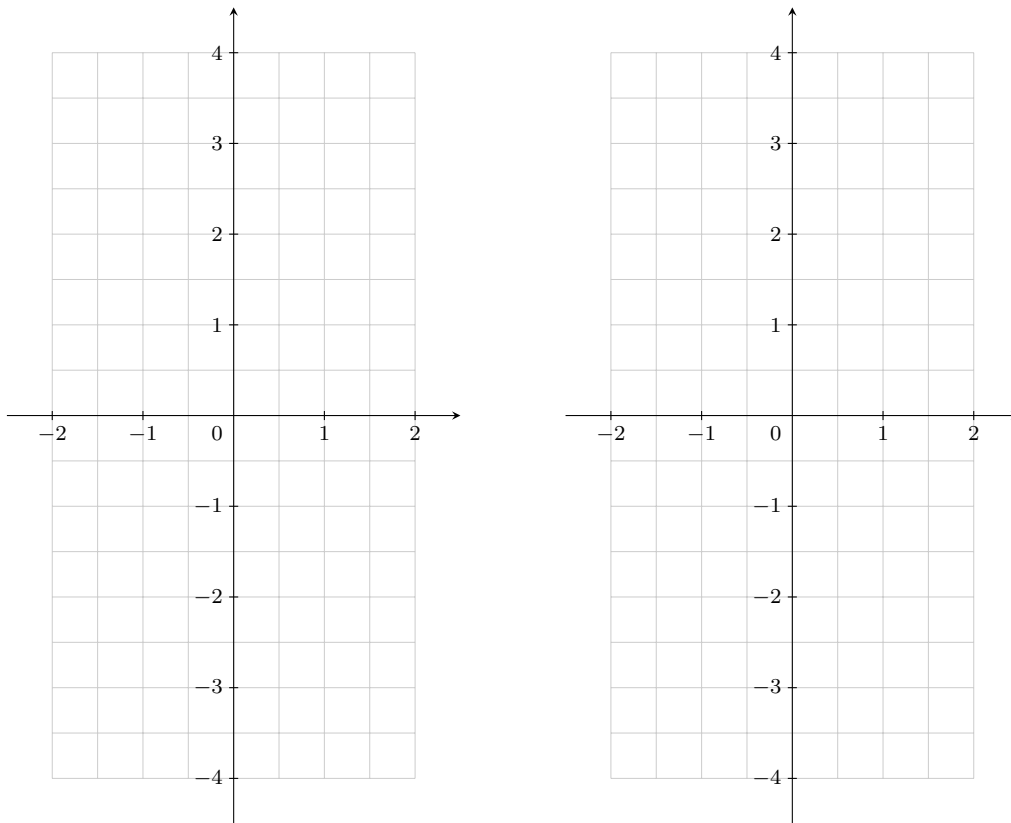
$$\text{sh}(2) \approx \frac{\quad}{2} = \frac{\quad}{2} \approx \underbrace{\hspace{1cm}}_{?}; \quad \text{sh}(-2) \approx$$

21. Tangente a la gráfica de sh en el punto 0 .

Calcule $\text{sh}'(0)$ y determine la pendiente de la tangente a la gráfica de la función sh en el punto 0 .

Gráficas

22. Usando los resultados de todos los ejercicios anteriores dibuje las gráficas de $\cosh$ y $\sinh$.



23. Tarea optativa: dibujar las gráficas con un programa.

Dibuje las gráficas de $\cosh$ y $\sinh$ en un programa. Por ejemplo, puede instalar Gnuplot (www.gnuplot.info) y ejecutar en Gnuplot los siguientes comandos:

```
set size ratio 2
plot [-2:2] [-4:4] cosh(x)
plot [-2:2] [-4:4] sinh(x)
```

Conjunto de valores

24. Cuando x corre de 0 a $+\infty$, $\text{ch}(x)$ corre de $\underbrace{\hspace{1cm}}_{?}$ a $\underbrace{\hspace{1cm}}_{?}$.

Usando el teorema del valor $\underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{medio/intermedio}}$

se puede demostrar que ch toma todos los valores del intervalo $\underbrace{\hspace{1cm}}_{?}$.

La función ch es $\underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{par/impar}}$, por eso en el intervalo $(-\infty, 0)$

toma valores de $\underbrace{\hspace{1cm}}_{?}$ a $\underbrace{\hspace{1cm}}_{?}$.

25. De manera similar analice qué valores toma la función sh .

26. Determine las imágenes (los conjuntos de valores) de las funciones ch y sh :

$$\text{im}(\text{ch}) := \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} \quad y = \text{ch}(x)\} = \underbrace{\hspace{2cm}}_{?}$$

$$\text{im}(\text{sh}) =$$

27. Determine si la función $\text{ch}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cumple con las siguientes propiedades:

$\underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{¿es inyectiva?}}$

$\underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{¿es suprayectiva?}}$

$\underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{¿es biyectiva?}}$

Haga un análisis similar para la función $\text{sh}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$\underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{¿es inyectiva?}}$

$\underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{¿es suprayectiva?}}$

$\underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{¿es biyectiva?}}$

Ecuación cuadrática $t^2 - 2at - 1 = 0$

28. Solución de la ecuación $x^2 = p$ (repaso).

Consideramos la ecuación $x^2 = p$ con un parámetro real p y una incógnita real x . Esta ecuación tiene solución si y sólo si p satisface la condición $\underbrace{\hspace{2cm}}_?$.

En este caso las soluciones son

$$x = \underbrace{\hspace{1cm}}_? \quad \text{y} \quad x = \underbrace{\hspace{1cm}}_?,$$

la cuales coinciden si $p = \underbrace{\hspace{1cm}}_?$.

29. Cuadrado de la diferencia (repaso).

Recuerde la fórmula:

$$(t - a)^2 = \underbrace{\hspace{2cm}}_?.$$

30. Completar el cuadrado.

La ecuación $t^2 - 2at - 1 = 0$ se puede escribir en la forma

$$t^2 - 2at = 1.$$

Sume a ambos lados una expresión tal que el lado izquierdo se complete a un cuadrado:

$$t^2 - 2at + \underbrace{\hspace{1cm}}_? = 1 + \underbrace{\hspace{1cm}}_?.$$

Llegamos a la siguiente ecuación equivalente a la ecuación original:

$$\left(t \underbrace{\hspace{1cm}}_?\right)^2 = \underbrace{\hspace{2cm}}_?.$$

31. Análisis y solución.

Determine si la ecuación tiene solución real para todo $a \in \mathbb{R}$ o bajo ciertas restricciones.

Resuelva la ecuación:

$$\begin{array}{ccc} t \underbrace{\hspace{1cm}}_? = \underbrace{\hspace{1cm}}_? & \text{o} & t \underbrace{\hspace{1cm}}_? = \underbrace{\hspace{1cm}}_? \\ t = \underbrace{\hspace{1cm}}_? & \text{o} & t = \underbrace{\hspace{1cm}}_? \end{array}$$

Ecuación cuadrática $t^2 - 2at + 1 = 0$

32. Completar el cuadrado.

La ecuación $t^2 - 2at + 1 = 0$ se puede escribir en la forma

$$t^2 - 2at = -1.$$

Sume a ambos lados una expresión tal que el lado izquierdo se complete a un cuadrado:

$$t^2 - 2at + \underbrace{\quad}_{?} = \underbrace{\quad}_{?} - 1.$$

Llegamos a la siguiente ecuación equivalente a la ecuación original:

$$\left(t \underbrace{\quad}_{?}\right)^2 = \underbrace{\quad}_{?}. \quad (1)$$

33. Análisis.

Determine si la ecuación (1) tiene solución real para todo $a \in \mathbb{R}$ o bajo ciertas restricciones.

34. Solución.

Suponiendo que a satisface la condición establecida en el ejercicio anterior resuelva la ecuación (1):

$$\begin{array}{cc} t \underbrace{\quad}_{?} = \underbrace{\quad}_{?} & \text{o} & t \underbrace{\quad}_{?} = \underbrace{\quad}_{?} \\ t = \underbrace{\quad}_{?} & \text{o} & t = \underbrace{\quad}_{?} \end{array}$$

Denotemos estas dos raíces por t_1 y t_2 .

35. Determine cuándo $t_1 = t_2$.

36. Análisis de raíces.

Calcule el producto $t_1 t_2$. Suponiendo que $t_1 \neq t_2$ compare t_1 y t_2 con 1.

Funciones hiperbólicas inversas

37. Solución de la ecuación $\exp(x) = t$ (repaso). Consideramos la ecuación

$$e^x = t,$$

donde x es una incógnita real y t es un parámetro real. Esta ecuación tiene solución si y sólo si t pertenece al intervalo $\underbrace{\hspace{2cm}}_?$. En este caso $x = \underbrace{\hspace{2cm}}_?$.

38. Función inversa a la función sh. Del análisis anterior sigue que para todo $y \in \mathbb{R}$ existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $\text{sh}(x) = y$. Este x se puede calcular de manera explícita y se llama *arcoseno hiperbólico* de y . Lo vamos a denotar por $\text{ash}(y)$. Otras notaciones comunes son arsenh , asenh , arsh .

Resuelva la ecuación $\text{sh}(x) = y$ por medio del cambio de variables $t = e^x$:

$$\frac{e^x -}{2} = y \quad \Longleftrightarrow \quad t - \underbrace{\hspace{1cm}} = 2y$$

$$\Longleftrightarrow \quad t =$$

$$\Longleftrightarrow \quad e^x =$$

$$\Longleftrightarrow \quad x =$$

39. Resumen: arcoseno hiperbólico.

$$\text{ash}: \underbrace{\hspace{1cm}}_? \rightarrow \underbrace{\hspace{1cm}}_?, \quad \text{ash}(y) = \ln(\underbrace{\hspace{2cm}}_?).$$

La función ash es inversa a la función sh :

$$\forall x \in \underbrace{\hspace{1cm}}_? \quad \text{ash}(\text{sh}(x)) = \underbrace{\hspace{1cm}}_?$$

$$\forall y \in \underbrace{\hspace{1cm}}_? \quad \text{sh}(\text{ash}(y)) = \underbrace{\hspace{1cm}}_?$$

40. La función $\text{ch}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no es inyectiva ni suprayectiva. Por eso la restringimos al intervalo donde esta función es estrictamente creciente.

La función ch crece estrictamente en el intervalo $X := \underbrace{\hspace{2cm}}_{?}$.

El conjunto de valores de ch en el intervalo X es $Y := \text{ch}(X) = \underbrace{\hspace{2cm}}_{?}$.

Consideramos la función

$$\text{ch}_+: \underbrace{\hspace{2cm}}_X \rightarrow \underbrace{\hspace{2cm}}_Y.$$

Esta función es inyectiva y suprayectiva, por lo tanto invertible. La función inversa a ch_+ se llama el *arcocoseno hiperbólico*. La denotemos por ach . Otras notaciones comunes son arccosh , acosh y arch .

41. Supongamos que $y \in \underbrace{\hspace{2cm}}_{?}$ para que la ecuación $\text{ch}(x) = y$ tenga solución.

Resuelva la ecuación $\text{ch}(x) = y$ por medio del cambio de variables $t = e^x$:

$$\frac{e^x +}{2} = y \quad \Longleftrightarrow \quad t + \underbrace{\hspace{2cm}} = 2y$$

$$\Longleftrightarrow \quad t =$$

$$\Longleftrightarrow \quad \exp(x) =$$

$$\Longleftrightarrow \quad x =$$

42. Resumen: arcocoseno hiperbólico.

$$\text{ach}: \underbrace{\hspace{2cm}}_{?} \rightarrow \underbrace{\hspace{2cm}}_{?}, \quad \text{ach}(y) = \ln(\underbrace{\hspace{2cm}}_{?}).$$

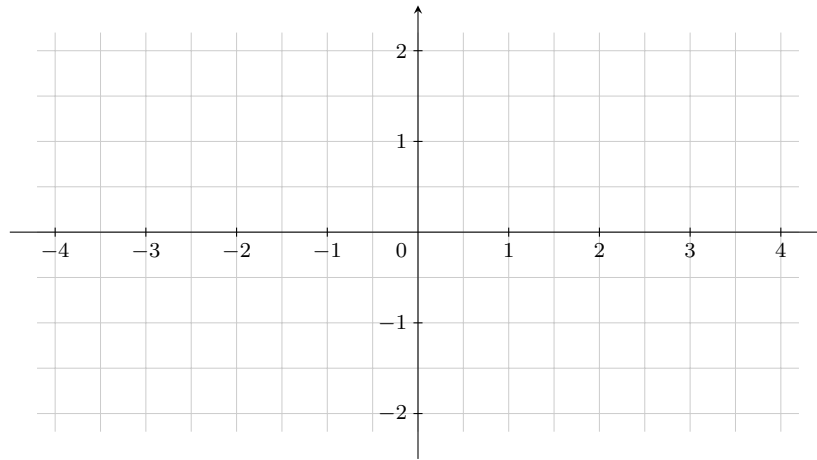
La función ach es inversa a la función ch_+ :

$$\forall x \in \underbrace{\hspace{2cm}}_{?} \quad \text{ach}(\text{ch}(x)) = \underbrace{\hspace{2cm}}_{?}$$

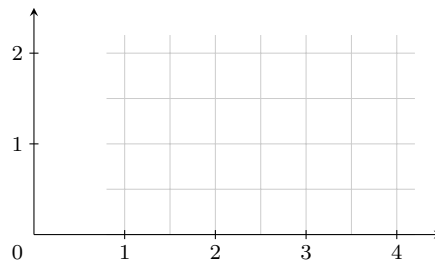
$$\forall y \in \underbrace{\hspace{2cm}}_{?} \quad \text{ch}(\text{ach}(y)) = \underbrace{\hspace{2cm}}_{?}$$

Gráficas de las funciones hiperbólicas inversas

43. Dibuje la gráfica de arsh .



44. Dibuje la gráfica de arch .



Solución de ecuaciones $\text{sh}(x) = y$ y $\text{ch}(x) = y$ con incógnitas reales y parámetros reales

45. Resumen: solución de ecuación $\text{sh}(x) = y$ en variables reales. Consideremos la ecuación $\text{sh}(x) = y$, donde x es una incógnita real, y es un parámetro real.

La ecuación $\text{sh}(x) = y$ tiene solución si y sólo si $y \in \underbrace{\hspace{2cm}}_{?}$.

Para todo $y \in \underbrace{\hspace{2cm}}_{?}$, la ecuación tiene $\underbrace{\hspace{2cm}}_{¿cuántas soluciones?}$.

$$x = \underbrace{\hspace{1cm}}_{?}(y) = \ln(\underbrace{\hspace{2cm}}_{?}).$$

46. Resumen: solución de ecuación $\text{ch}(x) = y$ en variables reales. Consideremos la ecuación $\text{ch}(x) = y$, donde x es una incógnita real, y es un parámetro real.

La ecuación $\text{sh}(x) = y$ tiene solución si y sólo si $y \in \underbrace{\hspace{2cm}}_{?}$.

Separamos dos casos: $y = 1$ y $\underbrace{\hspace{1cm}}_{?}$.

Para $y = 1$, la ecuación tiene $\underbrace{\hspace{2cm}}_{¿cuántas soluciones?}$.

Para todo $y \in \underbrace{\hspace{2cm}}_{?}$, la ecuación tiene $\underbrace{\hspace{2cm}}_{¿cuántas soluciones?}$.

$$x = \underbrace{\hspace{1cm}}_{?}(y) = \underbrace{\hspace{1cm}}_{?} \ln(\underbrace{\hspace{2cm}}_{?}).$$