

Coseno y seno hiperbólico de un argumento complejo

(ejercicios)

Objetivos. Estudiar propiedades de las funciones ch y sh con dominio $\mathbb{C}$.

Requisitos. Propiedades de la función exponencial (incluso la periodicidad), definición de las funciones hiperbólicas ch y sh , definición de las funciones trigonométricas a través de la función exponencial.

1. Definición del coseno y seno hiperbólico de un argumento complejo (repaso).

En esta sección tratamos ch y sh como funciones de argumentos complejos:

$$\text{ch}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \text{ch}(z) := \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2};$$

$$\text{sh}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \text{sh}(z) := \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}.$$

Por brevedad vamos a escribir e^z en vez de $\exp(z)$.

2. Paridad.

Recuerde las fórmulas:

$$\text{ch}(-x) = \underbrace{\hspace{2cm}}_{?}, \quad \text{sh}(-x) = \underbrace{\hspace{2cm}}_{?}$$

Esto significa que ch es una función $\underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{par/impar}}$, sh es una función $\underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{par/impar}}$.

Expresión de las funciones trigonométricas a través de las hiperbólicas y viceversa

3. Definición de las funciones trigonométricas a través de la función exponencial (repaso). Las funciones trigonométricas $\cos: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y $\text{sen}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se pueden definir a través de la función exponencial por las fórmulas de Euler:

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \quad \text{sen}(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i};$$

4. Simplifique: $\frac{1}{i} = \underbrace{\hspace{1cm}}_{?}$.

5. Expresión de cos y sen a través de ch y sh.

Escriba cos y sen en términos de ch y sh:

$$\cos(z) = \underbrace{\hspace{1cm}}_{?}; \quad \text{sen}(z) = \underbrace{\hspace{1cm}}_{?} = \underbrace{\hspace{1cm}}_{?}.$$

6. Si $w = iz$, entonces $z = \underbrace{\hspace{1cm}}_{?} w$.

7. Expresión de ch y sh a través de cos y sen.

Escriba ch y sh en términos de cos y sen:

$$\text{ch}(z) = \cos(\underbrace{\hspace{1cm}}_{?}) = \underbrace{\hspace{1cm}}_{?}, \quad \text{sh}(z) = \underbrace{\hspace{1cm}}_{?} = \underbrace{\hspace{1cm}}_{?}.$$

8. Resumen.

$$\begin{array}{ll} \cos(z) = & \text{sen}(z) = \\ \text{ch}(z) = & \text{sh}(z) = \end{array}$$

Deducción de las fórmulas para $\text{ch}(a + b)$ y $\text{sh}(a + b)$ (repaso)

9. Escriba los siguientes productos como semisumas o semirestas de $\text{ch}(a + b)$, $\text{ch}(a - b)$, $\text{sh}(a + b)$ y $\text{sh}(a - b)$.

$$\text{ch}(a) \text{ch}(b) = \frac{e^a +}{2} \cdot \frac{e^b +}{2} = \frac{e^{a+b} +}{4} = \frac{1}{2} \left(\text{ch}(a + b) + \underbrace{\hspace{2cm}}_{?} \right).$$

$$\text{sh}(a) \text{sh}(b) =$$

$$\text{ch}(a) \text{sh}(b) =$$

$$\text{sh}(a) \text{ch}(b) =$$

10. Fórmulas para los productos de **ch** y **sh**. Resumen:

$$\text{ch}(a) \text{ch}(b) = \frac{1}{2} \left(\hspace{2cm} \right) \quad \text{ch}(a) \text{sh}(b) = \frac{1}{2} \left(\hspace{2cm} \right)$$

$$\text{sh}(a) \text{sh}(b) = \hspace{2cm} \quad \text{sh}(a) \text{ch}(b) = \hspace{2cm}$$

11. Sumando algunas dos fórmulas del ejercicio 10 deduzca una fórmula para $\text{ch}(a + b)$. Sumando otras dos fórmulas del ejercicio 10 deduzca una fórmula para $\text{sh}(a + b)$.

12. Fórmulas para **ch**($a + b$) y **sh**($a + b$). Resumen:

$$\text{ch}(a + b) =$$

$$\text{sh}(a + b) =$$

13. Usando las fórmulas del ejercicio anterior y las propiedades de paridad de **ch** y **sh** escriba fórmulas para $\text{ch}(a - b)$ y $\text{sh}(a - b)$:

$$\text{ch}(a - b) =$$

$$\text{sh}(a - b) =$$

Fórmulas para $\text{ch}^2(x)$ y $\text{sh}^2(x)$ (repaso)

14. Deduzca fórmulas para $\text{ch}^2(x)$ y $\text{sh}^2(x)$.

15. Resumen.

$$\text{ch}^2(x) = \frac{\quad}{2}, \quad (1)$$

$$\text{sh}^2(x) = \frac{\quad}{2}. \quad (2)$$

16. Comprobación con $x = 0$.

Evalúe ambos lados de (1) en el punto $x = 0$:

$$\text{ch}^2(0) = \underbrace{\quad}_{?}, \quad \frac{\quad}{2} = \underbrace{\quad}_{?}.$$

Evalúe ambos lados de (2) en el punto $x = 0$:

$$\text{sh}^2(0) = \underbrace{\quad}_{?}, \quad \frac{\quad}{2} = \underbrace{\quad}_{?}.$$

17. Comprobación con $x \rightarrow +\infty$.

Calcule los límites de ambos lados de (1) cuando $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{ch}^2(x) = \underbrace{\quad}_{?}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\quad}{2} = \underbrace{\quad}_{?}.$$

Calcule los límites de ambos lados de (2) cuando $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh}^2(x) = \underbrace{\quad}_{?}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\quad}{2} = \underbrace{\quad}_{?}.$$

Fórmulas para $\cos^2(y)$ y $\sen^2(y)$ (repaso)

18. Deduzca fórmulas para $\cos^2(y)$ y $\sen^2(y)$ usando las fórmulas de Euler:

$$\begin{aligned}\cos^2(y) &= \left(\frac{e^{iy} +}{2} \right)^2 = \frac{e^{2iy} +}{4} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\quad}{2} + \quad \right) = \frac{1}{2} \left(\quad \right);\end{aligned}$$

$$\sen^2(y) =$$

19. Resumen.

$$\cos^2(y) = \frac{\quad}{2}, \quad (3)$$

$$\sen^2(y) = \frac{\quad}{2}. \quad (4)$$

20. Comprobación con $y = 0$. Evalúe ambos lados de (3) en el punto $y = 0$:

$$\cos^2(0) = \underbrace{\quad}_{?}, \quad \frac{\quad}{2} = \underbrace{\quad}_{?}.$$

Evalúe ambos lados de (4) en el punto $y = 0$:

$$\sen^2(0) = \underbrace{\quad}_{?}, \quad \frac{\quad}{2} = \underbrace{\quad}_{?}.$$

21. Comprobación con $y = \frac{\pi}{2}$. Evalúe ambos lados de (3) en el punto $y = \frac{\pi}{2}$:

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \underbrace{\quad}_{?}, \quad \frac{\quad}{2} = \underbrace{\quad}_{?}.$$

Evalúe ambos lados de (4) en el punto $y = \frac{\pi}{2}$:

$$\sen^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \underbrace{\quad}_{?}, \quad \frac{\quad}{2} = \underbrace{\quad}_{?}.$$

Partes real e imaginaria de las funciones hiperbólicas

Copiamos los resultados de algunos de los ejercicios anteriores:

22. Fórmulas para $\operatorname{ch}(a + b)$ y $\operatorname{sh}(a + b)$.

$$\operatorname{ch}(a + b) = \qquad \qquad \qquad \operatorname{sh}(a + b) =$$

23. Expresión de $\cos(y)$ y $\operatorname{sen}(y)$ en términos de $\operatorname{ch}(\mathrm{i} y)$ y $\operatorname{sh}(\mathrm{i} y)$.

$$\cos(y) = \operatorname{ch}\left(\quad\right), \qquad \operatorname{sen}(y) = \quad \operatorname{sh}\left(\quad\right).$$

24. Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Exprese $\operatorname{ch}(x + \mathrm{i} y)$ y $\operatorname{sh}(x + \mathrm{i} y)$ a través de $\operatorname{ch}(x)$, $\operatorname{sh}(x)$, $\cos(y)$, $\operatorname{sen}(y)$.

$$\operatorname{ch}(x + \mathrm{i} y) = \operatorname{ch}(x) \operatorname{ch}(\mathrm{i} y) + \qquad \qquad \qquad =$$

$$\operatorname{sh}(x + \mathrm{i} y) =$$

25. Las partes reales e imaginarias de ch y sh (resumen).

$$\operatorname{ch}(x + \mathrm{i} y) =$$

$$\operatorname{sh}(x + \mathrm{i} y) =$$

Valor absoluto de las funciones hiperbólicas

26. Recuerde cómo se expresan $\operatorname{ch}^2(x)$ y $\operatorname{sh}^2(x)$ a través de $\operatorname{ch}(2x)$:

$$\operatorname{ch}^2(x) = \frac{\quad}{2}, \quad \operatorname{sh}^2(x) = \frac{\quad}{2}.$$

27. Recuerde cómo se expresan $\cos^2(y)$ y $\operatorname{sen}^2(y)$ a través de $\cos(2y)$:

$$\cos^2(y) = \frac{\quad}{2}, \quad \operatorname{sen}^2(y) = \frac{\quad}{2}.$$

28. Cuadrado del valor absoluto de un número complejo.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Recuerde cómo se expresa $|a + \mathrm{i} b|^2$ a través de a y b :

$$|a + \mathrm{i} b|^2 = \underbrace{\quad}_{?}.$$

29. Calcule $|\operatorname{ch}(x + \mathrm{i} y)|^2$ y $|\operatorname{sh}(x + \mathrm{i} y)|^2$.

Cálculo del argumento (ángulo) de $\operatorname{ch}(x + i y)$ y de $\operatorname{sh}(x + i y)$

30. Cómo calcular la forma polar de un número complejo (repaso). Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a^2 + b^2 \neq 0$.

Denotemos $a + i b$ por c . Recordemos cómo escribir c en la forma polar

$$a + i b = r e^{i \varphi}.$$

El valor absoluto (radio) de c se puede calcular por la fórmula

$$r = \sqrt{\quad}.$$

El argumento (ángulo) φ del número complejo c se determina salvo un sumando de la forma $2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Se cumplen las fórmulas:

$$\cos(\varphi) = \frac{\quad}{r}, \quad \operatorname{sen}(\varphi) = \quad \quad \operatorname{tg}(\varphi) = \quad \quad \operatorname{ctg}(\varphi) =$$

Para calcular φ , uno puede usar cualquiera de estas ecuaciones, recordar la definición de las funciones trigonométricas inversas y tomar en cuenta los signos de a y b .

31. Calcule $\operatorname{tg}(\varphi)$, donde φ es un argumento (ángulo) del número complejo $\operatorname{ch}(x + i y)$.

32. Calcule $\operatorname{tg}(\varphi)$, donde φ es un argumento (ángulo) del número complejo $\operatorname{sh}(x + i y)$.