

Fórmulas principales para funciones hiperbólicas (ejercicios)

Objetivos. Deducir fórmulas principales para las funciones hiperbólicas ch y sh, partiendo de su definición a través de la función exponencial.

Requisitos. Función exponencial y su propiedad principal, definición de las funciones ch y sh.

1. Definición de la función exponencial (repaso).

La función exponencial $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se define mediante la siguiente serie de potencias:

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\quad}_{?}.$$

Se sabe que esta serie converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{C}$.

Por brevedad, en vez de $\exp(z)$ escribimos e^z .

2. Propiedad principal de la función exponencial (repaso). Para todos $a, b \in \mathbb{C}$,

$$e^{a+b} = \underbrace{\quad}_{?}.$$

3. Definición de las funciones ch y sh (repaso). Para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$\operatorname{ch}(z) := \quad \quad \quad \operatorname{sh}(z) :=$$

4. Paridad de las funciones ch y sh (repaso). Para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$\operatorname{ch}(-z) = \underbrace{\quad}_{?}, \quad \operatorname{sh}(-z) = \underbrace{\quad}_{?}.$$

Esto significa que ch es una función $\underbrace{\quad}_{\text{par/impar}}$ y sh es una función $\underbrace{\quad}_{\text{par/impar}}$.

5. Identidad fundamental para funciones hiperbólicas. Simplifique la expresión:

$$\operatorname{ch}^2(z) - \operatorname{sh}^2(z) =$$

Fórmulas para multiplicar cosenos y senos hiperbólicas

6. Hay que reconocer las funciones hiperbólicas cuando estas aparecen como sumas o restas de funciones exponenciales de argumentos opuestos:

$$\frac{\exp(x^2 - 7y) + \exp(7y - x^2)}{2} = \text{ch}(x^2 - 7y),$$

$$\frac{\exp(3a - b) - \exp(b - 3a)}{2} = \underbrace{\hspace{2cm}}_{?},$$

$$\exp(6a) + 2 + \exp(-6a) = 2 + \underbrace{\hspace{2cm}}_{?},$$

$$\exp(-3y) - \exp(3y) = \underbrace{\hspace{2cm}}_{?}.$$

7. **Fórmula para multiplicar ch por ch.** Aplique la definición de la función ch:

$$2 \text{ch}(a) \text{ch}(b) = 2 \frac{\hspace{2cm}}{2} \cdot \frac{\hspace{2cm}}{2}$$

haga la multiplicación usando las leyes aritméticas y la propiedad principal de la función exponencial:

$$= \frac{e^{a+b} + \hspace{2cm}}{2}$$

agrupe los sumandos y escriba el resultado a través de funciones hiperbólicas:

$$= \frac{\hspace{2cm}}{2} + \frac{\hspace{2cm}}{2}$$

$$= \text{ch}(a + b) + \underbrace{\hspace{2cm}}_{?}.$$

Resumen:

$2 \text{ch}(a) \text{ch}(b) = \hspace{2cm}.$

8. Fórmula para multiplicar sh por sh.

$$2 \operatorname{sh}(a) \operatorname{sh}(b) =$$

Resumen:

$2 \operatorname{sh}(a) \operatorname{sh}(b) =$	.
---	---

9. Fórmula para multiplicar ch por sh.

$$2 \operatorname{ch}(a) \operatorname{sh}(b) =$$

Resumen:

$2 \operatorname{ch}(a) \operatorname{sh}(b) =$	.
---	---

Cambiando los papeles de a y b :

$2 \operatorname{sh}(a) \operatorname{ch}(b) =$	.
---	---

Fórmulas para $\text{ch}^2(a)$, $\text{sh}^2(a)$ y $\text{ch}(a) \text{sh}(a)$

10. Valores de ch y sh en el punto 0.

$$\text{ch}(0) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \underbrace{\quad}_{?}; \quad \text{sh}(0) =$$

11. Recuerde las fórmulas deducidas en los ejercicios anteriores:

$$2 \text{ch}(a) \text{ch}(b) =$$

$$2 \text{sh}(a) \text{sh}(b) =$$

$$2 \text{ch}(a) \text{sh}(b) =$$

12. En las fórmulas del ejercicio anterior ponga $b = a$:

$$2 \text{ch}^2(a) =$$

$$2 \text{sh}^2(a) =$$

$$2 \text{ch}(a) \text{sh}(a) =$$

13. Los mismos resultados se pueden obtener directamente:

$$2 \text{ch}^2(a) = 2 \frac{(\quad)^2}{4} =$$

$$2 \text{sh}^2(a) =$$

$$2 \text{ch}(a) \text{sh}(a) =$$

14. Resumen.

$$2 \text{ch}^2(a) = \quad .$$

$$2 \text{sh}^2(a) = \quad .$$

$$2 \text{ch}(a) \text{sh}(a) = \quad .$$

Fórmulas para $\text{ch}^3(a)$ y $\text{sh}^3(a)$

15. Recuerde la fórmula: $(p + q)^3 =$

16. Poniendo $-q$ en lugar de q : $(p - q)^3 =$

17. Calcule el producto, agrupe los sumandos y conviértalos en funciones hiperbólicas:

$$\begin{aligned}\text{ch}^3(a) &= \frac{\left(\frac{\quad}{8}\right)^3}{8} = \frac{\quad}{8} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\quad}{2} + 3 \frac{\quad}{2} \right) = \frac{1}{4} \left(\underbrace{\quad}_{?} + 3 \underbrace{\quad}_{?} \right).\end{aligned}$$

De aquí se puede despejar $\text{ch}(3a)$: $\text{ch}(3a) =$

18. De manera similar deduzca una fórmula para $\text{sh}^3(a)$, luego despeje $\text{sh}(3a)$.

19. Resumen.

$$\text{ch}^3(a) = \frac{1}{4} \left(\quad \right).$$

$$\text{sh}^3(a) = \frac{1}{4} \left(\quad \right).$$

$$\text{ch}(3a) =$$

$$\text{sh}(3a) =$$

Fórmulas para $\operatorname{ch}(a + b)$ y $\operatorname{sh}(a + b)$

20. Fórmulas para multiplicar cosenos y senos hiperbólicas (repaso).

$$2 \operatorname{ch}(a) \operatorname{ch}(b) = \quad (1)$$

$$2 \operatorname{sh}(a) \operatorname{sh}(b) = \quad (2)$$

$$2 \operatorname{ch}(a) \operatorname{sh}(b) = \quad (3)$$

$$2 \operatorname{sh}(a) \operatorname{ch}(b) = \quad (4)$$

21. Deducción de la fórmula para $\operatorname{ch}(a + b)$.

Sumando las fórmulas $\left(\underbrace{\quad}_{?}\right)$ y $\left(\underbrace{\quad}_{?}\right)$ en el lado derecho obtenemos $2 \operatorname{ch}(a + b)$:

$$= 2 \operatorname{ch}(a + b)$$

De aquí

$\operatorname{ch}(a + b) = \quad .$

22. Deducción de la fórmula para $\operatorname{sh}(a + b)$.

Sumando las fórmulas $\left(\underbrace{\quad}_{?}\right)$ y $\left(\underbrace{\quad}_{?}\right)$ en el lado derecho obtenemos $2 \operatorname{sh}(a + b)$:

$$= 2 \operatorname{sh}(a + b)$$

Resumen:

$\operatorname{sh}(a + b) = \quad .$

Fórmulas para $\operatorname{ch}(a - b)$ y $\operatorname{sh}(a - b)$

23. Fórmulas para $\operatorname{ch}(a + b)$ y $\operatorname{sh}(a + b)$ (repaso).

Escriba las fórmulas obtenidas en los ejercicios anteriores:

$$\operatorname{ch}(a + b) =$$

$$\operatorname{sh}(a + b) =$$

24. Usando la fórmula para $\operatorname{ch}(a + b)$ y las propiedades de paridad de ch y sh deduzca una fórmula para $\operatorname{ch}(a - b)$:

$$\operatorname{ch}(a - b) = \operatorname{ch}(a + (-b)) = \operatorname{ch}(a) \operatorname{ch}(-b) \underbrace{\hspace{1cm}}_{?} = \quad .$$

Ahora para $\operatorname{sh}(a - b)$:

$$\operatorname{sh}(a - b) =$$

Resumen:

$\operatorname{ch}(a - b) =$

$\operatorname{sh}(a - b) =$

25. Vamos a hacer una comprobación (muy particular e incompleta) de las fórmulas obtenidas. En las fórmulas para $\operatorname{ch}(a - b)$ y $\operatorname{sh}(a - b)$ calcule ambos lados para $b = a$.

Fórmulas para sumar cosenos hiperbólicos y para sumar senos hiperbólicos

26. Fórmula para multiplicar cosenos y senos hiperbólicos (repaso).

Recuerde las fórmulas deducidas anteriormente:

$$2 \operatorname{ch}(a) \operatorname{ch}(b) =$$

$$2 \operatorname{ch}(a) \operatorname{sh}(b) =$$

$$2 \operatorname{sh}(a) \operatorname{sh}(b) =$$

27. Dados $x, y \in \mathbb{C}$ busquemos $a, b \in \mathbb{C}$ que satisfagan el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} a + b = x; \\ a - b = y. \end{cases}$$

Resuelva el sistema (se sugiere sumar y restar las ecuaciones).

Respuesta:

$$a =$$

$$b =$$

28. Usando alguna de las fórmulas que recordamos en el ejercicio 26 y el cambio de variables del ejercicio anterior halle una fórmula para $\operatorname{ch}(x) + \operatorname{ch}(y)$.

29. De manera similar deduzca una fórmula para $\operatorname{sh}(x) + \operatorname{sh}(y)$.

30. De manera similar halle una fórmula para $\operatorname{ch}(x) - \operatorname{ch}(y)$.