

Ecuaciones $\operatorname{ch}(z) = w$ y $\operatorname{sh}(z) = w$ con variables complejas (ejercicios)

Objetivos. Analizar ecuaciones $\operatorname{ch}(z) = w$ y $\operatorname{sh}(z) = w$ con una incógnita compleja z y un parámetro complejo w , expresar sus soluciones a través de la función $\ln$.

Requisitos. Propiedades de las funciones ch y sh de una variable compleja; propiedades de la función exponencial; definición del logaritmo natural.

1. Definición del coseno y seno hiperbólico de un argumento complejo (repaso).

En esta sección tratamos ch y sh como funciones de argumentos complejos:

$$\operatorname{ch}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \operatorname{ch}(z) := \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2};$$

$$\operatorname{sh}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \operatorname{sh}(z) := \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}.$$

Por brevedad vamos a escribir e^z en vez de $\exp(z)$.

2. Paridad. Recuerde las fórmulas:

$$\operatorname{ch}(-x) = \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{?}, \quad \operatorname{sh}(-x) = \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{?}$$

Esto significa que ch es una función $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{par/impar}}$, sh es una función $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{par/impar}}$.

Periodicidad de la función $\varphi \mapsto e^{i\varphi}$ (repaso)

Denotemos por $\mathbb{T}$ a la circunferencia unitaria en el plano complejo:

$$\mathbb{T} := \{w \in \mathbb{C}: |w| = 1\}.$$

3. Sentido geométrico del número $\exp(i\varphi)$.

Sea $\varphi \in \mathbb{R}$ y sea $t = e^{i\varphi}$. Entonces $|t| = \underbrace{\hspace{1.5cm}}_?$, esto es, $t \in \underbrace{\hspace{1.5cm}}_?$.

Por eso t se representa en el plano complejo

como un punto de la

y correspondiente al $\underbrace{\hspace{10cm}}_?$
 $\underbrace{\hspace{3cm}}_{\text{¿qué sentido geométrico tiene } \varphi?} \varphi.$

4. Hecho 1: solución general de la ecuación $e^{i\varphi} = 1$.

Sea $\varphi \in \mathbb{R}$. Entonces

$$e^{i\varphi} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad \underbrace{\hspace{2cm}}_?.$$

En otras palabras,

$$\{\varphi \in \mathbb{R}: e^{i\varphi} = 1\} = \{ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_? : k \in \mathbb{Z} \}.$$

5. Corolario: criterio de la igualdad $e^{i\alpha} = e^{i\beta}$. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces

$$e^{i\alpha} = e^{i\beta} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad \underbrace{\hspace{2cm}}_?.$$

6. Hecho 2: la función $\varphi \mapsto e^{i\varphi}$, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$ es suprayectiva.

Para todo $t \in \underbrace{\hspace{1.5cm}}_?$ existe un número $\varphi \in \underbrace{\hspace{1.5cm}}_?$ tal que $\underbrace{\hspace{2cm}}_?$.

Para lo que sigue es importante elegir en $\mathbb{R}$ un intervalo semiabierto de longitud 2π ; las opciones más naturales son $[0, 2\pi)$ y $(-\pi, \pi]$; en este texto vamos trabajar con $(-\pi, \pi]$.

7. Para todo $t \in \underbrace{\hspace{1.5cm}}_?$ existe un único $\varphi \in (-\pi, \pi]$ tal que $\underbrace{\hspace{2cm}}_? = t$.

Argumento principal de un número complejo (repaso)

8. Valor absoluto de un número complejo (repaso). Sea $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Denotemos por $|z|$ al *valor absoluto (módulo)* de z :

$$|z| := \sqrt{\quad}.$$

9. Definición del argumento principal de un número complejo distinto de cero.

Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pongamos $t := \frac{z}{|z|}$. Entonces $|t| = \underbrace{\quad}_{?}$.

Por eso existe un único número $\varphi \in (-\pi, \pi]$ tal que $\underbrace{\quad}_{?} = t$, o sea $\underbrace{\quad}_{?} = z$.

Este número φ se llama el *argumento principal* de z . Vamos a denotarlo por $\arg(z)$.

10. Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entonces $|z| e^{i\varphi} = z \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad \varphi = \arg(z) + \underbrace{\quad}_{?}$.

En otras palabras, el conjunto de todos los argumentos de z se puede expresar a través del argumento principal de z de la siguiente manera:

$$\left\{ \varphi \in \mathbb{R} : |z| e^{i\varphi} = z \right\} = \left\{ \arg(z) + \underbrace{\quad}_{?} : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

11. Expresión del argumento principal a través de funciones trigonométricas inversas (ejercicio optativo).

Sea $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\sin(\arg(z)) = \text{---}, \quad \cos(\arg(z)) = \text{---}, \quad \operatorname{tg}(\arg(z)) = \text{---}.$$

Tomando en cuenta los signos de x, y uno puede expresar $\arg(z)$ a través de las funciones $\arcsen$, $\arccos$, arctg y arctg . Por ejemplo, si $x < 0, y > 0$, entonces $\arg(z)$ está en el siguiente intervalo:

$$\arg(z) \in \left(\quad, \quad \right),$$

mientras que

$$\arcsen \frac{y}{|z|} \in \left(\quad, \quad \right), \quad \arccos \frac{x}{|z|} \in \left(\quad, \quad \right), \quad \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \in \left(\quad, \quad \right).$$

De aquí se pueden deducir las siguientes fórmulas (para $x < 0, y < 0$):

$$\arg(z) = \underbrace{\quad}_{\substack{\text{en términos de} \\ \arcsen \frac{y}{|z|}}} = \underbrace{\quad}_{\substack{\text{en términos de} \\ \arccos \frac{x}{|z|}}} = \underbrace{\quad}_{\substack{\text{en términos de} \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}}.$$

Logaritmo de un número complejo distinto de cero (repaso)

Aquí siempre vamos a hablar del logaritmo *natural* (en base e).

12. Logaritmo de un número positivo. La función $x \mapsto e^x$, $\mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, es estrictamente $\underbrace{\hspace{10em}}$ y por lo tanto $\underbrace{\hspace{10em}}$.

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{¿creciente o decreciente?}} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{¿inyectiva o suprayectiva?}}$

Además,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \underbrace{\hspace{2em}}_{?} \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \underbrace{\hspace{2em}}_{?}.$$

De la continuidad sigue que cuando x corre de $-\infty$ a $+\infty$, e^x toma todos los valores de $\underbrace{\hspace{2em}}_{?}$ a $\underbrace{\hspace{2em}}_{?}$.

Por lo tanto, la función que estamos considerando es $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{¿inyectiva o suprayectiva?}}$.

De lo anterior sigue que esta función es biyectiva. Denotemos su inversa por $\ln_+$. De esta definición obtenemos que

$$\ln_+ : \underbrace{\hspace{2em}}_{?} \rightarrow \underbrace{\hspace{2em}}_{?},$$

y para todo $r > 0$

$$\exp(\ln_+(r)) = \underbrace{\hspace{2em}}_{?}.$$

13. Muestre que $e^\xi \neq 0$ para todo $\xi \in \mathbb{C}$.

14. Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ Para comprender mejor qué forma tiene la solución general de la ecuación $e^\xi = z$ recordamos que la función exponencial es periódica:

$$\forall \xi \in \mathbb{C} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad e^{\xi + 2k\pi i} = \underbrace{\hspace{2em}}_{?}.$$

15. Valor principal del logaritmo de un número complejo distinto de cero.

Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Muestre que existe un único número $\xi \in \mathbb{C}$ tal que

$$e^{\xi} = z, \quad \text{y} \quad \text{Im}(\xi) \in (-\pi, \pi].$$

Vamos a decir que ξ es el *valor principal del logaritmo* de z y denotarlo por $\ln(z)$. Exprese ξ en términos de $\ln_+$ y $\arg$.

16. Solución general de la ecuación $\exp(\xi) = z$.

Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Encuentre la solución general de la ecuación $e^{\xi} = z$.

Raíces cuadradas de un número complejo (repaso)

17. Raíces cuadradas de un número complejo (repaso).

Se puede demostrar que para todo número complejo $d \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

existen exactamente dos números complejos cuyos cuadrados coinciden con d .

Uno de estos números complejos tiene argumento en $[0, \pi)$, y lo denotamos por $\sqrt{d}$; el otro tiene argumento en $\underbrace{\hspace{2cm}}_{?}$ y es igual a $-\sqrt{d}$.

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación compleja $c^2 = d$ con $d \neq 0$ es

$$\left\{ \hspace{1cm} , \hspace{1cm} \right\}.$$

En el caso $d = 0$ la ecuación $c^2 = 0$ tiene una única solución: $c = \underbrace{\hspace{1cm}}_{?}$,

la cual también se puede denotar por $\sqrt{0}$.

18. Raíces cuadradas a través de la forma polar (ejercicio optativo). Demuestre los enunciados del ejercicio anterior usando la forma polar de números complejos.

19. Solución de la ecuación cuadrática (repaso).

Sean $a, b \in \mathbb{C}$. Resuelva la ecuación $(t - a)^2 = b$ para la incógnita t .

Solución de la ecuación $\operatorname{ch}(z) = w$

20. Paridad y periodicidad de ch. Para comprender mejor la estructura del conjunto solución de esta ecuación recordemos que ch es una función par y periódica: para todos $z \in \mathbb{C}$ y $k \in \mathbb{Z}$

$$\operatorname{ch}(-z) =$$

$$\operatorname{ch}(z + 2k\pi i) =$$

21. Cambio de variable.

En la ecuación $\operatorname{ch}(z) = w$ haga el cambio de variable $t := e^z$ y encuentre t .

22. Solución. Usando el resultado del ejercicio anterior escriba la solución general de la ecuación $\operatorname{ch}(z) = w$.

Solución de la ecuación $\operatorname{sh}(z) = w$

23. Paridad y periodicidad de sh. Para comprender mejor la estructura del conjunto solución de esta ecuación recordemos que sh es una función periódica: para todos $z \in \mathbb{C}$ y $k \in \mathbb{Z}$

$$\operatorname{ch}(z + 2k\pi i) =$$

24. Cambio de variable.

En la ecuación $\operatorname{sh}(z) = w$ haga el cambio de variable $t := e^z$ y encuentre t .

25. Solución. Usando el resultado del ejercicio anterior escriba la solución general de la ecuación $\operatorname{sh}(z) = w$.