El teorema fundamental del álgebra

Objetivos. Demostrar el teorema fundamental del álgebra.

Prerrequisitos. El principio del módulo máximo, el teorema de Liouville.

Observación 1. Hubo varios intentos (incompletos o falsos) de demostraciones, desde d'Alembert. Posiblemente, las primeras demostraciones correctas fueron de Argand (1806) y Gauss (1816).

Teorema 2 (teorema fundamental del álgebra)**.** *Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tal que $c_n \neq 0$. Definimos $P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,*

$$P(z) \coloneqq \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

Entonces, existe z en $\mathbb{C}$ tal que $P(z) = 0$.

Primera demostración. Vamos a usar el principio del módulo máximo. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que P no tiene ceros en $\mathbb{C}$. Consideramos la función $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$g(z) \coloneqq \frac{1}{P(z)}.$$

Sea

$$s \coloneqq |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|$$

y sea

$$r \coloneqq \frac{s + |a_0| + |a_n|}{|a_n|}.$$

Esta definición de r garantiza que

$$r > 1.$$

Notamos que para cada z en $\mathbb{C}$ con $|z| = r$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} |a_k z^k| = \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\, r^k \le \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\, r^{n-1} = s r^{n-1}.$$

Para cada z con $|z| = r$,

$$\begin{aligned}|P(z)| &\ge |a_n z^n| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k z^k| \ge |a_n| r^n - M r^{n-1} = r^{n-1}(|a_n| r - s) \\ &\ge |a_n|\, r - s = |a_0| + |a_n|.\end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada z con $|z| = r$,

$$|g(z)| \le \frac{1}{|a_0| + |a_n|}.$$

Pongamos

$$M \coloneqq \max_{z \in r\mathbb{T}} |g(z)| = \max_{\vartheta \in [0,2\pi]} |g(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\vartheta})|.$$

Entonces,

$$M \le \frac{1}{|a_0| + |a_n|} < \frac{1}{|a_0|} = |g(0)|.$$

Esto contradice al principio del módulo máximo. □

Segunda demostración. Vamos a usar el teorema de Liouville. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que P no tiene ceros en $\mathbb{C}$. Consideramos la función $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$g(z) \coloneqq \frac{1}{P(z)}.$$

Es fácil ver que

$$\lim_{z \to \infty} |g(z)| = 0. \tag{1}$$

Entonces, existe $R > 0$ tal que $|g(z)| \le 1$ para cada z en $\mathbb{C} \setminus (R\,\mathrm{cl}(\mathbb{D}))$. Por otro lado, como g es continua en el compacto $R\,\mathrm{cl}(\mathbb{D})$, g es acotada en $R\,\mathrm{cl}(\mathbb{D})$. Concluimos que g es acotada en $\mathbb{C}$. Por el teorema de Liouville, g es una constante. La denotemos por c. Por (1), concluimos que $c = 0$. Por otro lado, $g(0) = \frac{1}{P(0)} \ne 0$. □