Definición de la función exponencial

Objetivos. Definir la función exponencial $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como la suma de la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Mostrar que esta serie converge para cada z en $\mathbb{C}$. Demostrar las propiedades principales de la función exponencial:

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w),$$

$$\exp' = \exp, \qquad \exp(0) = 1,$$

$$\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z}).$$

Prerrequisitos. Series de potencias, propiedades de coeficientes binominales, teorema del binomio.

Radio de convergencia de una serie de potencias (repaso)

Observación 1 (fórmula de Cauchy–Hadamard para el radio de convergencia de una serie de potencias, repaso)**.** El radio de convergencia de una serie de potencias

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

se puede calcular mediante la fórmula

$$\frac{1}{R} = \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Observación 2 (fórmula de d'Alembert, repaso)**.** Si existe un límite finito positivo

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k},$$

entonces el radio de convergencia es

$$\frac{1}{R} = \qquad\qquad\qquad .$$

Convergencia de la serie que define la función exponencial

Se considera la serie de potencias

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}. \tag{1}$$

Denotemos su k-ésimo coeficiente por a_k:

$$a_k \coloneqq \frac{1}{k!}.$$

Ejercicio 3. Escriba los primeros 6 términos de la serie (1).

Ejercicio 4. Calcule

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}.$$

Ejercicio 5. Calcule

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}.$$

Ejercicio 6. Determine el radio de convergencia de la serie (1).

Ejercicio 7. Calcule $\exp(0)$.

Exponencial de la suma

Definición 8. Para cada z en $\mathbb{C}$ y cada n en $\mathbb{N}_0$, denotemos por $S_n(z)$ la siguiente suma finita:

$$S_n(z) \coloneqq \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}.$$

Ejercicio 9. Sean $a, b \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Usando la ley distributiva en $\mathbb{C}$, muestre que

$$S_n(a)S_n(b) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{j!\,k!} a^j\, b^k.$$

Ejercicio 10. Sean $a, b \in \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{N}_0$. Recuerde la fórmula para la potencia del binomio:

$$(a+b)^j = ?.$$

Ejercicio 11. Sean $a, b \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Usando la fórmula del ejercicio anterior, escriba la siguiente expresión como una suma doble cuyos términos sean productos de potencias de a y b con ciertos coeficientes:

$$S_n(a+b) = \ldots = \sum_{(j,k)\in ?} ?\, a^j b^k.$$

Ejercicio 12. Usando los resultados de los Ejercicios 9 y 11, escriba la siguiente diferencia como cierta suma de productos de potencias de a y b, con ciertos coeficientes:

$$S_n(a)S_n(b) - S_n(a+b) = \sum_{(j,k)\in ?} ?\, a^j b^k.$$

Encuentre una cota superior absoluta conveniente de esta diferencia y luege demuestre que esta diferencia tiende a 0 cuando n tiende a ∞:

$$|S_n(a)S_n(b) - S_n(a+b)| \le ?.$$

$$\lim_{n\to\infty} (S_n(a)S_n(b) - S_n(a+b)) = 0.$$

Ejercicio 13. Sean $a, b \in \mathbb{C}$. Usando el resultado del ejercicio anterior, demuestre que

$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b).$$

Derivada de la función exponencial

Ejercicio 14. Recuerde el teorema sobre la derivada de una serie de potencias.

Ejercicio 15. Calcule $\exp'$.

Ejercicio 16. Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Calcule

$$\frac{\exp(z) - 1}{z}.$$

Ejercicio 17. Calcule

$$\lim_{z\to 0} \frac{\exp(z) - 1}{z}.$$

La exponencial y la conjugación

Ejercicio 18. Demuestre que para cada n en $\mathbb{N}$,

$$\overline{\sum_{k=0}^{n} z^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{z}^k.$$

Ejercicio 19 (la conjugación es una función Lipschitz continua)**.** Defimos $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) \coloneqq \overline{z}$. Demuestre que la función f es Lipschitz continua.

Ejercicio 20. Demuestre que para cada z en $\mathbb{C}$,

$$\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z}).$$