

Convergencia de series de números positivos

Objetivos. Demostrar el criterio de convergencia de series de números positivos, en términos de acotación de sus sumas parciales.

Prerrequisitos. El supremo de una sucesión.

Aplicaciones. Convergencia de dos series de números positivos comparables.

Usamos la notación

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Cuando hablamos del supremo o ínfimo de un conjunto A , contenido en $\mathbb{R}$, por lo común lo tratamos como un subconjunto de $\overline{\mathbb{R}}$. A veces, si $A \subseteq [0, +\infty)$, tratamos A como un subconjunto de $[0, +\infty]$.

Definición 1 (el supremo de una sucesión de números). Sea $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$. Entonces,

$$\sup_{k \in \mathbb{N}_0} a_k := \sup a[\mathbb{N}_0].$$

Proposición 2 (el límite de una sucesión creciente, repaso). Sea $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}_0}$ tal que

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad a_k \leq a_{k+1}.$$

Entonces,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \sup_{k \in \mathbb{N}_0} a_k.$$

Proposición 3. Sea $a \in [0, +\infty)^{\mathbb{N}_0}$. Definimos $s \in [0, +\infty)^{\mathbb{N}_0}$,

$$s_m := \sum_{k=0}^m a_k \quad (m \in \mathbb{N}_0).$$

Entonces,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sup_{m \in \mathbb{N}_0} s_m.$$

En particular, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge, si y solamente si, s es acotada.

Proposición 4 (convergencia de dos series comparables de números positivos). Sean $a, b \in [0, +\infty)^{\mathbb{N}_0}$. Supongamos que existe n en $\mathbb{N}_0$ tal que para cada k en $\mathbb{N}_0$, si $k \geq n$, entonces

$$a_k \leq b_k.$$

Además, supongamos que la serie $\sum_{k \in \mathbb{N}_0} b_k$ converge. Entonces, la serie $\sum_{k \in \mathbb{N}_0} a_k$ converge.

Demostración. Sean s y t las sucesiones de las sumas parciales correspondientes:

$$s_m := \sum_{k=0}^m a_k, \quad t_m := \sum_{k=0}^m b_k.$$

Para cada m con $m \geq n$,

$$\begin{aligned} s_m &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k + \sum_{k=n}^m a_k = s_{n-1} + \sum_{k=n}^m a_k \\ &\leq s_{n-1} + \sum_{k=n}^m b_k = s_{n-1} + t_m - t_{n-1} = (s_{n-1} - t_{n-1}) + t_m. \end{aligned}$$

Como la sucesión t es acotada, concluimos que la sucesión s es acotada. $\square$

Proposición 5. Sean $a, b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ tales que

$$a_k = b_k - b_{k+1} \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Entonces,

$$\sum_{k=0}^m a_k = b_0 - b_{m+1}.$$

Ejemplo 6. Consideremos la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

Notamos que

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{k=0}^m \frac{1}{(k+1)(k+2)} = 1 - \frac{1}{m+2},$$

y

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = 1.$$

Ejemplo 7.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)^2} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} < +\infty.$$