Convergencia de series de números complejos

Objetivos. Definir el concepto de series convergencias y sus sumas.

Prerrequisitos. Completez del espacio métrico $\mathbb{C}$, criterio de Cauchy para la convergencia de sucesiones.

Por lo común, trabajamos con el conjunto de índices $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Definición 1. Sea $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$. Definimos la sucesión s de las sumas parciales de a mediante la siguiente regla:

$$s_m := \sum_{k=0}^{m} a_k \qquad (m \in \mathbb{N}_0).$$

Se dice que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *converge* si existe b en $\mathbb{C}$ tal que $s \to b$. En este caso, se escribe que

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = b.$$

Ejercicio 2. Sea $p \in \mathbb{Z}$, sea $J := \{k \in \mathbb{Z}\colon\ k \geq p\}$, y sea $a \in \mathbb{C}^J$. Definir la convergencia de la serie $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$.

Proposición 3. *Sea $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$. Definimos $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$,*

$$a_k := u_k - u_{k+1}.$$

Entonces, para cada m en $\mathbb{N}_0$,

$$\sum_{k=0}^{m} a_k = u_0 - u_{m+1}.$$

Ejemplo 4. Consideremos la siguiente serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

Notamos que

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}.$$

Por lo tanto,

$$s_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = 1 - \frac{1}{m+2}$$

y

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \lim_{m\to\infty} \left(1 - \frac{1}{m+2}\right) = 1.$$

Ejemplo 5. $a_k = (-1)^k$.

Ejemplo 6. $a_k = -k$.

Ejemplo 7. $a_k = (-1)^{k+1} \left\lfloor \dfrac{k}{2} \right\rfloor$.

Proposición 8. *Sea* $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$. *Entonces,* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *converge si, y sólo si,*

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists m \in \mathbb{N}_0 \qquad \forall j, k \in \mathbb{N}_0 \qquad \left(p, q \geq m \quad \Longrightarrow \quad \left| \sum_{k=p+1}^{q} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Demostración. Aplicamos el criterio de convergencia de Cauchy a la sucesión de las sumas parciales. □