

Funciones analíticas definidas por una integral especial

Objetivos. Demostrar que una integral especial define una función que se representa por series de potencias.

Prerrequisitos. Teorema de la convergencia uniforme para la integral de Lebesgue, fórmula para la suma de la serie geométrica.

Observación 1. Recordemos que cada medida compleja (absolutamente finita) se puede escribir de la forma

$$\nu = \nu_1 - \nu_2 + i(\nu_3 - \nu_4),$$

donde $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ son algunas medidas (positivas) finitas. La medida $|\nu|$ es una medida usual. Para cada conjunto Y medible, se cumplen las desigualdades

$$|\nu(Y)| \leq |\nu|(Y) \leq \nu_1(Y) + \nu_2(Y) + \nu_3(Y) + \nu_4(Y).$$

Teorema 2. Sean X un conjunto, $\mathcal{F}$ una σ -álgebra sobre X , $\nu: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}$ una medida compleja absolutamente finita, $\varphi: X \rightarrow \mathbb{C}$ una función $\mathcal{F}$ -medible, Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ tal que $\Omega \cap \varphi[X] = \emptyset$. Definimos $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(z) := \int_X \frac{d\nu(w)}{\varphi(w) - z}. \quad (1)$$

Entonces, f se representa por series de potencias en Ω .

Demostración. Sean $a \in \Omega$, $r > 0$ tales que $D(a, r) \subseteq \Omega$.

Sea $z \in D(a, r)$. Para cada w en X , tenemos que

$$\varphi(w) \in \varphi[X] \notin D(a, r).$$

Por lo tanto,

$$|\varphi(w) - a| \geq r$$

y

$$\left| \frac{z - a}{\varphi(w) - a} \right| \leq \frac{|z - a|}{r}, \quad \frac{|z - a|}{r} < 1.$$

Concluimos que la siguiente serie converge de manera uniforme respecto a la variable w , cuando w recorre el conjunto X (tratamos z como un parámetro fijo):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - a}{\varphi(w) - a} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\varphi(w)-a}} = \frac{\varphi(w) - a}{\varphi(w) - z}.$$

Multiplicamos esta serie por la función acotada $w \mapsto \frac{1}{\varphi(w)-a}$ y obtenemos otra serie que también converge de manera uniforme:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-a)^k}{(\varphi(w)-a)^{k+1}} = \frac{1}{\varphi(w)-z}.$$

Por el teorema de la convergencia uniforme,

$$f(z) = \int_X \frac{d\nu(w)}{\varphi(w)-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-a)^k d\nu(w)}{(\varphi(w)-a)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k,$$

donde

$$c_k := \int_X \frac{d\nu(w)}{(\varphi(w)-a)^{k+1}}.$$

□

Observación 3. En la demostración del Teorema 2, la convergencia de la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

se sigue del teorema de la convergencia uniforme. Podemos justificarla también de manera más directa:

$$|c_k| \leq \int_X \frac{d|\nu|(w)}{|\varphi(w)-z|^{k+1}} \leq \frac{|\nu|(X)}{r^{k+1}}.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k (z-a)^k| \leq |\nu|(X) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z-a|^k}{r^{k+1}} = \frac{|\nu|(X)}{r \left(1 - \frac{|z-a|}{r}\right)} = \frac{|\nu|(X)}{r - |z-a|}.$$