

La identidad de Parseval para series de potencias

Objetivos. Demostrar la identidad de Parseval para series de potencias convergentes.

Prerrequisitos. El radio de convergencia de una serie de potencias, la ortogonalidad de las funciones básicas de Fourier, el teorema sobre la integral y una serie uniformemente convergente.

Definición 1 (las funciones básicas de Fourier). Para cada m en $\mathbb{Z}$, definimos $\varphi_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\varphi_m(\vartheta) := e^{m i \vartheta}.$$

Proposición 2 (periodicidad de las funciones básicas de Fourier). Para cada m en $\mathbb{Z}$, la función φ_m es continua y 2π -periódica. En particular,

$$\varphi_m(2\pi) = \varphi_m(0) = 1.$$

Para m en $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, el período positivo mínimo de φ_m es $\frac{2\pi}{|m|}$.

Demostración. Se sigue de la periodicidad de la función φ_1 . □

Proposición 3 (propiedades algebraicas de las funciones básicas de Fourier). Para cada p, q en $\mathbb{Z}$ y cada ϑ, η en $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi_p(\vartheta + \eta) &= \varphi_p(\vartheta)\varphi_p(\eta), & \overline{\varphi_p(\vartheta)} &= \frac{1}{\varphi_p(\vartheta)} = \varphi_p(-\vartheta), \\ \varphi_p(\vartheta)\varphi_q(\vartheta) &= \varphi_{p+q}(\vartheta), & \overline{\varphi_p(\vartheta)} &= \frac{1}{\varphi_p(\vartheta)} = \varphi_{-p}(\vartheta).\end{aligned}$$

Demostración. Se sigue de las propiedades de exp. □

Proposición 4. Para cada m en $\mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{m i \vartheta} d\vartheta = \delta_{m,0}.$$

Demostración. Para $m = 0$, el resultado es obvio. Para $m \neq 0$, tenemos que

$$\left(\frac{1}{m i} \varphi_m \right)' = \varphi_m.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{m i \vartheta} d\vartheta = \frac{1}{m i} \left(\varphi_m(2\pi) - \varphi_m(0) \right) = 0. \quad \square$$

Proposición 5 (ortogonalidad de las funciones básicas de Fourier). *Para cada p, q en $\mathbb{Z}$,*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{p i \vartheta} e^{-q i \vartheta} d\vartheta = \delta_{p,q}.$$

Demostración. Se obtiene de las Proposiciones 3 y 4. □

Observación 6. En lo que sigue, entendemos la “serie bilateral”, con índices en $\mathbb{Z}$, como el siguiente límite:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{k i \vartheta} := \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=-m}^m b_k e^{k i \vartheta}.$$

Proposición 7 (la identidad de Parseval para las series trigonométricas uniformemente convergentes). *Sea $b \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ tal que la siguiente serie converge de manera uniforme:*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{k i \vartheta} = g(\vartheta) \quad (\vartheta \in \mathbb{R}).$$

Entonces,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |b_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(\vartheta)|^2 d\vartheta. \quad (1)$$

Demostración. Denotemos por S_m a la m -ésima suma parcial:

$$S_m(\vartheta) := \sum_{k=-m}^m b_k e^{k i \vartheta} \quad (\vartheta \in \mathbb{R}).$$

Consideramos la integral de $|S_m|^2$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |S_m(\vartheta)|^2 d\vartheta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_m(\vartheta) \overline{S_m(\vartheta)} d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{p=-m}^m b_p e^{p i \vartheta} \right) \left(\sum_{q=-m}^m \overline{b_q} e^{-q i \vartheta} \right) d\vartheta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{p,q=-m}^m b_p \overline{b_q} e^{p i \vartheta} e^{-q i \vartheta} d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \sum_{p,q=-m}^m b_p \overline{b_q} \int_0^{2\pi} e^{(p-q) i \vartheta} d\vartheta \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-m}^m |b_p|^2. \end{aligned}$$

En ambos lados de la igualdad pasamos al límite cuando $m \rightarrow \infty$. Como $|S_m|$ converge a $|g|^2$ de manera uniforme, en el lado izquierdo se puede aplicar el teorema de la convergencia uniforme para las integrales. De esta manera, obtenemos (1). □

Teorema 8 (la identidad de Parseval para las series de potencias). Sea $c \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ y sea $a \in \mathbb{C}$. Denotemos por R el radio de convergencia de la siguiente serie de potencias y por f su suma:

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k \quad (|z - a| < R). \quad (2)$$

Entonces, para cada r que satisface $0 < r < R$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 r^{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + r e^{i\vartheta})|^2 d\vartheta. \quad (3)$$

Demostración. Sea $r \in (0, R)$. Ya sabemos que la serie (2) converge de manera uniforme en el disco cerrado $a + r \text{cl}(\mathbb{D})$. En particular, esta serie converge de manera uniforme en la circunferencia $a + r\mathbb{T}$. Hacemos el cambio de coordenadas $z = a + r e^{i\vartheta}$. Concluimos que la siguiente serie converge uniformemente en $\mathbb{R}$:

$$f(a + r e^{i\vartheta}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k e^{k i \vartheta} \quad (\vartheta \in \mathbb{R}).$$

Podemos aplicar la Proposición 7, con la siguiente función límite y los siguientes coeficientes de la serie de Fourier:

$$g(\vartheta) := f(a + r e^{i\vartheta}), \quad b_k := \begin{cases} c_k r^k, & k \geq 0; \\ 0, & k < 0. \end{cases}$$

Entonces, (1) se convierte en (3). □