Estimación de Cauchy para los coeficientes de una serie de potencias convergente

Objetivos. Dada una serie de potencias convergente, acotar el valor absoluto de su coeficiente en términos del valor máximo de la suma de la serie. Usaremos la identidad de Parseval para las series de potencias.

Prerrequisitos. La identidad de Parseval para series de potencias.

Teorema 1 (la identidad de Parseval para las series de potencias, repaso)**.** *Sea $c \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ y sea $a \in \mathbb{C}$. Denotemos por R el radio de convergencia de la siguiente serie de potencias y por f su suma:*

$$f(z) \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \qquad (|z-a| < R). \tag{1}$$

Entonces, para cada r que satisface $0 < r < R$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 r^{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\vartheta})|^2 \,\mathrm{d}\vartheta. \tag{2}$$

Proposición 2 (la estimación de Cauchy para los coeficientes de una serie de potencias)**.** *Supongamos que $a \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$, y la serie de potencias*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

tiene radio de convergencia $R > 0$. Denotemos por f su suma:

$$f(z) \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \qquad (|z-a| < R).$$

Sea $r > 0$ tal que $r < R$ y sea

$$M \coloneqq \sup_{z \in a + r\mathbb{T}} |f(z)|.$$

Entonces, para cada k en $\mathbb{N}_0$,

$$|c_k| \le \frac{M}{r^k} \tag{3}$$

y

$$|f^{(k)}(a)| \le \frac{k!\, M}{r^k}. \tag{4}$$

Demostración. Aplicamos (2) y acotamos la función $|f|^2$ por su valor máximo en $a + r\mathbb{T}$:

$$\sum_{j=0}^{\infty} |c_j|^2 r^{2j} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\vartheta})|^2 \,\mathrm{d}\vartheta \le M^2.$$

Sea $k \in \mathbb{N}_0$. El k-ésimo sumando es menor o igual que la suma de la serie:

$$|c_k|^2 r^{2k} \le \sum_{j=0}^{\infty} |c_j|^2 r^{2j} \le M^2.$$

De aquí obtenemos (3). Para obtener (4), recordamos que

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

Luego $f^{(k)}(a) = k!\, c_k$. □

Proposición 3 (la estimación de Cauchy para los coeficientes de una serie de potencias, usando el supremo sobre el disco de convergencia)**.** *Supongamos que $a \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$, y la serie de potencias*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k$$

tiene radio de convergencia R tal que $0 < R < +\infty$. Denotemos por f su suma:

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k \qquad (|z - a| < R).$$

Sea

$$A := \sup_{z \in a + R\mathbb{D}} |f(z)|.$$

Entonces, para cada k en $\mathbb{N}_0$,

$$|c_k| \le \frac{A}{R^k} \tag{5}$$

y

$$|f^{(k)}(a)| \le \frac{k!\,A}{R^k}. \tag{6}$$

Demostración. Para cada r en $(0, R)$, definimos

$$M_r := \sup_{z \in a + r\mathbb{T}} |f(z)|.$$

Notamos que $M_r \le A$. Sea $k \in \mathbb{N}_0$. Por la Proposición 2,

$$|c_k| \le \frac{M_r}{r^k} \le \frac{A}{r^k}.$$

Esta desigualdad se cumple para cada r tal que $0 < r < R$. Pasamos al límite cuando $r \to R$ y obtenemos el resultado. □