

¿Por qué el curso Cálculo I es tan difícil para la mayoría de los estudiantes de Licenciatura en Física y Matemáticas?

Hay varias razones, pero la razón principal es obvia: los estudiantes de los primeros semestres no están suficientemente preparados. En este pequeño texto quiero mostrar con ejemplos el nivel adecuado para estudiar Cálculo I.

Los siguientes 15 problemas provienen de exámenes de admisión en universidades provinciales de Rusia. En aquel sistema de educación (que ya está parcialmente destruido) los estudiantes de preparatoria se entrenaban con problemas de este tipo (y de otros tipos) antes de entrar a universidades o institutos politécnicos y estudiar cálculo. Escribí solamente algunos problemas típicos de precálculo, sin tocar álgebra y geometría.

1. Resolver la desigualdad: $|2x - 3| - |x - 1| \geq 3$.

2. Resolver la desigualdad: $\sin(x) \geq \cos(2x)$.

3. Resolver la desigualdad: $\frac{(x^2 - 1)(x + 2)^2(x + 7)(x - 3) \log_{1/2}(x + 5)}{(x - 2)(x^2 - 5x + 6) \log_2 |x - 1|} \leq 0$.

4. Resolver la desigualdad: $\log_2(4^x - 5 \cdot 2^x + 2) > 2$.

5. Resolver la desigualdad: $\log_2(1 - x) + \log_{1/2}(x + 1) < 0$.

6. Resolver la desigualdad: $\frac{x^2 - |x| - 12}{x - 3} \geq x$.

7. Resolver la desigualdad: $\sqrt{x^2 - 5x + 4} > x - 3$.

8. Resolver la desigualdad: $\sqrt{x^2 - 5x + 3} \geq \sqrt{x^2 - 2x + 1}$.

9. Resolver la desigualdad: $\frac{|2x - 1|}{x^2 - x - 2} > \frac{1}{2}$.

10. Para cada valor del parámetro a resolver la desigualdad $|x + 2a| + |x - a| < 3x$.

11. Para cada valor del parámetro a resolver la desigualdad $\frac{(x - 5)^2(x - 4)}{(x - a)(x - 3)} \geq 0$.

12. Determinar los valores del parámetro a para los cuales ambas raíces del siguiente polinomio son números reales menores que 1:

$$x^2 - (2a + 1)x + a + 2.$$

13. Resolver la ecuación para cualquier valor del parámetro a :

$$(\operatorname{sen}(x))^2 - 3 \cos(x) + a - 1 = 0.$$

14. Determinar los valores del parámetro a para los cuales la siguiente ecuación tiene al menos una solución: $3 \cos(x) - \operatorname{sen}(x) + 4 = a$.

15. Demostrar que la siguiente desigualdad se cumple para cualquier x en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, y la igualdad se alcanza solamente para $x = 1$:

$$\left| x + \frac{1}{x} \right| \geq 2.$$

Hagamos un experimento: un buen estudiante de la ESFM del IPN de los primeros semestres tendrá tres horas para resolver algunos de estos 15 problemas, los que quiera. ¿Cuántos problemas podrá resolver correctamente?

Algunas destrezas necesarias para empezar a estudiar cálculo

1. Razonar. En vez de seguir un par de recetas simples, buscar soluciones de problemas nuevos aplicando varios métodos estudiados.
2. Trabajar con desigualdades, aplicando reglas lógicas y operaciones aritméticas.
3. Unir, intersecar y comparar intervalos del eje real.
4. Trabajar con el valor absoluto.
5. Hacer cambios de variables que simplifican la solución del problema.
6. Analizar los signos y la monotonía de funciones elementales (racionales, irracionales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas).
7. Resolver ecuaciones y desigualdades simples con funciones elementales.
8. Hallar el dominio natural de definición de funciones elementales.
9. Analizar problemas por casos: determinar los casos que ayudan a simplificar el problema, partir el problema en casos de manera correcta (los casos deben cubrir todas las posibilidades), en cada caso resolver el problema y tomar en cuenta las condiciones del caso, finalmente unir las soluciones obtenidas en cada caso.
10. Distinguir la implicación de la equivalencia. Estar acostumbrados que al transformar una ecuación o desigualdad, pueden surgir ecuaciones o desigualdades no equivalentes al problema original.
11. Resolver problemas con parámetros.
12. Tener experiencia de hacer demostraciones simples, justificando bien cada paso.