Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
Posgrado en Ciencias Físicomatemáticas

Línea de Matemáticas

Lista de problemas de cálculo, 2016

Egor Maximenko: En mi opinión, cualquier estudiante de maestría o doctorado, cuya área de investigación está relacionada con análisis (análisis real, complejo, funcional o armónico), debe resolver la mayor parte de estos problemas de cálculo. Casi todos los problemas son bien conocidos, los encontré en varias fuentas.

Límites

Problema 1. Calcular el límite de la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dada por una condición inicial y por una regla recursiva:

$$x_1 = 0, \qquad x_n = \sqrt{12 + x_{n-1}}.$$

Problema 2. Sea $a > 0$. Consideremos la sucesión $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ definida mediante una condición inicial y una fórmula recursiva:

$$x_0 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \quad \forall n \in \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Demostrar que esta sucesión tiene un límite finito y calcular este límite.

Problema 3. Sea $a > 0$. Calcular el límite

$$\lim_{x\to a} \frac{x^x - a^a}{x - a}.$$

Problema 4. Sea $a > 0$. Calcular el límite

$$\lim_{x\to a} \frac{x^{x^x} - a^{a^a}}{x - a}.$$

Problema 5. Calcular el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{tg}(x)) - \operatorname{tg}(\operatorname{sen}(x))}{\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{arc\,tg}(x)) - \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{arc\,sen}(x))}.$$

Problema 6. Calcular el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{n} + \cos\frac{2}{n} + \ldots + \cos\frac{n}{n}}{n}.$$

Problema 7. Sea $\alpha > 0$. Calcular el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + 3^\alpha + \ldots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}.$$

Problema 8. Sean $a_1, \ldots, a_m > 0$. Calcular el límite

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_1^n + \cdots + a_m^n\right)^{1/n}.$$

Problema 9. Consideremos la suceción de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $f_n\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, definidas mediante la regla:

$$f_n(x) = n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right) \qquad \forall x \in (0,+\infty) \quad \forall n \in \{1,2,3,\ldots\}.$$

Calcular el límite puntual de esta sucesión y determinar si la convergencia es uniforme o no.

Problema 10. Demostrar la fórmula de Stirling:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\,\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1.$$

Problema 11. Calcular el límite

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^n}{n!}\right)^{1/n}.$$

Series

Problema 12. Calcular la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 12n^2 + 47n + 60}.$$

Problema 13. Sean $t, a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$. Calcular las sumas de las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(nt), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a^n \operatorname{sen}(nt).$$

Problema 14. Deducir una fórmula para la función A definida como la suma de la siguiente serie:

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n \qquad (|x| < 1).$$

Problema 15. Demostrar los teoremas de Abel y Dirichlet sobre la convergencia de series.

Problema 16. Deducir una fórmula para la función A definida como la suma de la siguiente serie:

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad (|x| < 1).$$

Calcular la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Problema 17. Denotemos por H_n al n-ésimo *número armónico*:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Demostrar que para todo n entero positivo,

$$\ln(n+1) \le H_n \le \ln(n) + 1.$$

Problema 18. Deducir una fórmula directa para la sucesión de Fibonacci $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ definida por una fórmula recursiva y por dos condiciones iniciales:

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad (n \ge 2).$$

Indicación: calcular la suma de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n.$$

Problema 19. Denotamos por $\mathbb{P}$ al conjunto de los números primos. Demostrar que para cada $s > 1$ se cumple la fórmula

$$\prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Problema 20. Demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Funciones continuas

Problema 21. Sea $f\colon [3,5] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que

$$\min_{x\in[3,5]} f(x) = 37, \qquad \max_{x\in[3,5]} f(x) = 57.$$

Demostrar que existe por lo menos un punto $c \in [3,5]$ tal que $f(c) = 10c + 7$.

Problema 22. Sean $p > 1$, $L > 0$ y sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que para cualesquier $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple la desigualdad

$$|f(x) - f(y)| \le L|x - y|^p.$$

Demostrar que f es una constante.

Problema 23. Encontrar una función $f\colon [0,1] \to [0,1]$ tal que

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| \qquad (x, y \in [0,1],\ x \ne y),$$

pero no existe $M < 1$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \le M|x - y| \qquad (x, y \in [0,1]).$$

Problema 24. Sea $f\colon [0,1) \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua en $[0,1)$. Demuestre que existe un límite finito de $f(x)$ cuando x tiende a 1.

Problema 25. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua, y sea $f(0) = 0$. Demuestre que existe un $B > 0$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}$ se cumple la desigualdad

$$|f(x)| \le 1 + B|x|.$$

Derivadas

Problema 26. Consideremos la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Demostrar que f es biyectiva y calcular la derivada de su inversa.

Problema 27. Demostrar que para cada $x > 0$,

$$\operatorname{sen}(x) > x - \frac{x^3}{6}.$$

Problema 28. Calcular $f^{(2016)}(0)$, donde

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x + 6}.$$

Problema 29. Calcular $f^{(2016)}(0)$, donde

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg}(x).$$

Problema 30. Sea $\mu > 0$. Calcular el supremo:

$$\sup\left\{\frac{a^\mu + b^\mu}{(a+b)^\mu}\colon\ a, b > 0\right\}.$$

Problema 31. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces continuamente derivable en $\mathbb{R}$. Para $k \in \{0, 1, 2\}$ denotemos por M_k al supremo del valor absoluto de la k-ésima derivada de f:

$$M_k := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)| \qquad (k = 0, 1, 2).$$

Demostrar que

$$M_1 \le 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

Problema 32. Sea A una matriz $n \times n$ con entradas reales. Definimos $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mediante la fórmula

$$f(x) = x^\top A x \qquad (x \in \mathbb{R}^n),$$

donde el vector x se trata como columna, y $x^\top$ es el vector transpuesto (vector renglón). Calcular el gradiente de la función f' en un punto general x.

Problema 33. Sea A una matriz $n \times n$ con entradas reales. Definimos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante la regla

$$f(x) = \det(I_n + xA),$$

donde I_n es la matriz identidad $n \times n$ y det es la función determinante. Calcular $f'(0)$.

Problema 34. Demostrar que $x^y + y^x > 1$ para toda $x, y > 0$.

Problema 35. Sea $t \in [0, \pi/2]$. Demostrar que

$$\operatorname{sen}(t) \ge \frac{2}{\pi} t.$$

Problema 36. Sean $t, p \in \mathbb{R}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, $0 < p < 1$. Demostrar que

$$(\cos t)^p \le \cos(pt).$$

Problema 37. ¿Cuál número es más grande, 3^π o π^3? Generalizar el resultado.

Integrales

Problema 38. Calcular las integrales (suponiendo $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$):

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos(bx)\,dx, \qquad \int_0^{+\infty} e^{-ax}\operatorname{sen}(bx)\,dx.$$

Problema 39. Calcular la integral

$$\int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}(x))^{2016}\,dx.$$

Problema 40. Calcular la integral de Gauss (también conocida como la integral de Euler y de Poisson), justificando bien todos los pasos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Problema 41. Calcular la integral de Dirichlet (la cual se define como una integral impropia):

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,dx.$$

Problema 42. Sea $a > 0$. Calcular el valor promedio de la función $\ln(x^2+y^2)$ en la circunferencia

$$(x-a)^2 + y^2 = 1.$$

Problema 43. Para cada $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ denotemos por S_n a la integral

$$S_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{\operatorname{sen}(x)}\,dx.$$

Encontrar una fórmula recursiva para S_n. Utilizando la fórmula encontrada calcular S_4, S_5, S_6.

Problema 44. Sea $n \in \{2, 3, \ldots\}$. Encontrar una función $g_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que para toda función continua $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ se cumpla la igualdad

$$\int_0^1 \int_0^{x_1} \ldots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)\,dx_n \cdots dx_2\,dx_1 = \int_0^1 g_n(t) f(t)\,dt.$$

Problema 45. Sea $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ una función continua de soporte compacto (es decir, existe un $b > 0$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x > b$). Definimos la función $g\colon (0, +\infty) \to [0, +\infty)$ de la siguiente manera:

$$\forall x > 0 \qquad g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(x)\,dx.$$

Sea $p > 1$. Demostrar la desigualdad de Hardy:

$$\int_0^{+\infty} g(x)^p \, dx \leq \frac{p}{p-1} \int_0^{+\infty} f(x)^p \, dx.$$

Problema 46. Sea f un polinomio de una variable real. Calcular el límite

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^{+\infty} t \, e^{-xt} f(x) \, dx.$$

Problema 47. Sean $x, y > 0$. Calcular la integral:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t} \, dt.$$

Problema 48. Calcular $F'(0)$, donde la función $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida mediante la regla

$$F(x) = \int_{\operatorname{sen}(x)}^{\cos(x)} e^{t^2 + xt} \, dt.$$

Problema 49. Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[0,1]$. Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 x^n f(x) \, dx, \qquad \lim_{n \to \infty} n \int_0^1 x^n f(x) \, dx.$$