Varias formas equivalentes del grupo $\mathbb{T} \cong \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ (un tema de la unidad “Series de Fourier”)

Egor Maximenko

`https://esfm.egormaximenko.com`

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

25 de octubre de 2024

Plan

Contenido

Objetivos

Conocer varias formas equivalentes del grupo $\mathbb{T}$:

$$\mathbb{T}, \qquad \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}), \qquad [0, 2\pi).$$

Mencionaremos la topología y la medida, pero no las vamos a estudiar bien.

Prerrequisitos

- Números complejos,
- el grupo cociente,
- el primer teorema de isomorfismos de grupos,
- la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

Plan

El grupo $\mathbb{T}$

$$\mathbb{T} := \left\{ z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1 \right\}.$$

El grupo $\mathbb{T}$

$$\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| = 1\}.$$

$\mathbb{T}$ se considera con la operación de multiplicación inducida de $\mathbb{C}$.

El grupo $\mathbb{T}$

$$\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \colon \ |z| = 1\}.$$

$\mathbb{T}$ se considera con la operación de multiplicación inducida de $\mathbb{C}$.

Proposición

$\mathbb{T}$ es un grupo conmutativo.

Demostración

1. Sabemos que la multiplicación en $\mathbb{C}$ es asociativa y conmutativa.

Demostración

1. Sabemos que la multiplicación en $\mathbb{C}$ es asociativa y conmutativa.

2. Si $z, w \in \mathbb{T}$, entonces

Demostración

1. Sabemos que la multiplicación en $\mathbb{C}$ es asociativa y conmutativa.

2. Si $z, w \in \mathbb{T}$, entonces

$$|zw|$$

Demostración

1. Sabemos que la multiplicación en $\mathbb{C}$ es asociativa y conmutativa.

2. Si $z, w \in \mathbb{T}$, entonces

$$|zw| =$$

Demostración

1. Sabemos que la multiplicación en $\mathbb{C}$ es asociativa y conmutativa.

2. Si $z, w \in \mathbb{T}$, entonces

$$|zw| = |z|\,|w|$$

Demostración

1. Sabemos que la multiplicación en $\mathbb{C}$ es asociativa y conmutativa.

2. Si $z, w \in \mathbb{T}$, entonces

$$|zw| = |z|\,|w| =$$

Demostración

1. Sabemos que la multiplicación en $\mathbb{C}$ es asociativa y conmutativa.

2. Si $z, w \in \mathbb{T}$, entonces
$$|zw| = |z|\,|w| = 1.$$

Demostración

1. Sabemos que la multiplicación en $\mathbb{C}$ es asociativa y conmutativa.

2. Si $z, w \in \mathbb{T}$, entonces
$$|zw| = |z|\,|w| = 1.$$

Por eso $zw \in \mathbb{T}$.

Demostración

1. Sabemos que la multiplicación en $\mathbb{C}$ es asociativa y conmutativa.

2. Si $z, w \in \mathbb{T}$, entonces

$$|zw| = |z|\,|w| = 1.$$

Por eso $zw \in \mathbb{T}$.

3. Si $z \in \mathbb{T}$, entonces $z^{-1} = \overline{z}$ y

Demostración

1. Sabemos que la multiplicación en $\mathbb{C}$ es asociativa y conmutativa.

2. Si $z, w \in \mathbb{T}$, entonces
$$|zw| = |z|\,|w| = 1.$$
Por eso $zw \in \mathbb{T}$.

3. Si $z \in \mathbb{T}$, entonces $z^{-1} = \overline{z}$ y
$$|z^{-1}|$$

Demostración

1. Sabemos que la multiplicación en $\mathbb{C}$ es asociativa y conmutativa.

2. Si $z, w \in \mathbb{T}$, entonces

$$|zw| = |z|\,|w| = 1.$$

Por eso $zw \in \mathbb{T}$.

3. Si $z \in \mathbb{T}$, entonces $z^{-1} = \overline{z}$ y

$$|z^{-1}| =$$

Demostración

1. Sabemos que la multiplicación en $\mathbb{C}$ es asociativa y conmutativa.

2. Si $z, w \in \mathbb{T}$, entonces

$$|zw| = |z|\,|w| = 1.$$

Por eso $zw \in \mathbb{T}$.

3. Si $z \in \mathbb{T}$, entonces $z^{-1} = \overline{z}$ y

$$|z^{-1}| = |\overline{z}|$$

Demostración

1. Sabemos que la multiplicación en $\mathbb{C}$ es asociativa y conmutativa.

2. Si $z, w \in \mathbb{T}$, entonces

$$|zw| = |z|\,|w| = 1.$$

Por eso $zw \in \mathbb{T}$.

3. Si $z \in \mathbb{T}$, entonces $z^{-1} = \overline{z}$ y

$$|z^{-1}| = |\overline{z}| =$$

Demostración

1. Sabemos que la multiplicación en $\mathbb{C}$ es asociativa y conmutativa.

2. Si $z, w \in \mathbb{T}$, entonces

$$|zw| = |z|\,|w| = 1.$$

Por eso $zw \in \mathbb{T}$.

3. Si $z \in \mathbb{T}$, entonces $z^{-1} = \overline{z}$ y

$$|z^{-1}| = |\overline{z}| = |z|$$

Demostración

1. Sabemos que la multiplicación en $\mathbb{C}$ es asociativa y conmutativa.

2. Si $z, w \in \mathbb{T}$, entonces

$$|zw| = |z|\,|w| = 1.$$

Por eso $zw \in \mathbb{T}$.

3. Si $z \in \mathbb{T}$, entonces $z^{-1} = \overline{z}$ y

$$|z^{-1}| = |\overline{z}| = |z| =$$

Demostración

1. Sabemos que la multiplicación en $\mathbb{C}$ es asociativa y conmutativa.

2. Si $z, w \in \mathbb{T}$, entonces

$$|zw| = |z|\,|w| = 1.$$

Por eso $zw \in \mathbb{T}$.

3. Si $z \in \mathbb{T}$, entonces $z^{-1} = \overline{z}$ y

$$|z^{-1}| = |\overline{z}| = |z| = 1,$$

Demostración

1. Sabemos que la multiplicación en $\mathbb{C}$ es asociativa y conmutativa.

2. Si $z, w \in \mathbb{T}$, entonces
$$|zw| = |z|\,|w| = 1.$$
Por eso $zw \in \mathbb{T}$.

3. Si $z \in \mathbb{T}$, entonces $z^{-1} = \overline{z}$ y
$$|z^{-1}| = |\overline{z}| = |z| = 1,$$
así que $z^{-1} \in \mathbb{T}$.

Demostración

1. Sabemos que la multiplicación en $\mathbb{C}$ es asociativa y conmutativa.

2. Si $z, w \in \mathbb{T}$, entonces
$$|zw| = |z|\,|w| = 1.$$
Por eso $zw \in \mathbb{T}$.

3. Si $z \in \mathbb{T}$, entonces $z^{-1} = \overline{z}$ y
$$|z^{-1}| = |\overline{z}| = |z| = 1,$$
así que $z^{-1} \in \mathbb{T}$.

4. Finalmente, $|1| = 1$, por eso $1 \in \mathbb{T}$.

La función circular

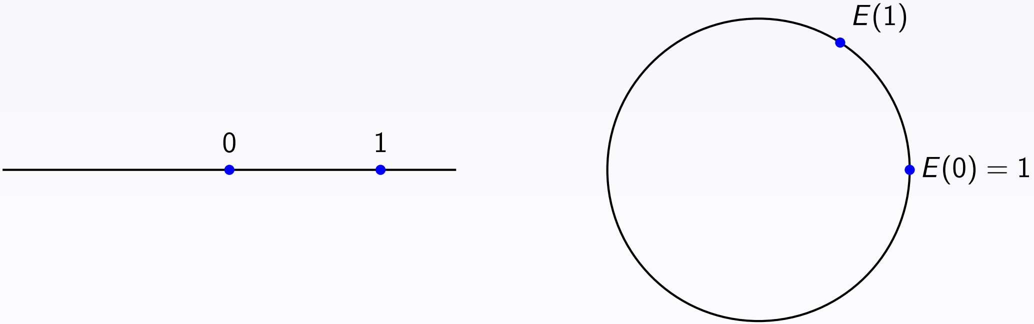
Definimos $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$,

$$E(x) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\,.$$

La función circular

Definimos $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$,

$$E(x) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\,.$$



Propiedades de la función E (sin demostración)

Proposición

E es un epimorfismo. $\ker(E) = 2\pi\mathbb{Z}$.

Propiedades de la función E (sin demostración)

Proposición

E es un epimorfismo. $\ker(E) = 2\pi\mathbb{Z}$.

Estos hechos son consecuencias de propiedades básicas de la función exponencial compleja.

Propiedades de la función E (sin demostración)

Proposición

E es un epimorfismo. $\ker(E) = 2\pi\mathbb{Z}$.

Estos hechos son consecuencias de propiedades básicas de la función exponencial compleja.

Se recomienda definir la función exponencial por medio de la serie de potencias y demostrar sus propiedades principales.

Plan

El grupo $\mathbb{R}_{2\pi}$

$\mathbb{R}_{2\pi} := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ (el grupo cociente).

El grupo $\mathbb{R}_{2\pi}$

$\mathbb{R}_{2\pi} := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ (el grupo cociente).

De la definición del grupo cociente se sigue que

$$(x + 2\pi\mathbb{Z}) + (y + 2\pi\mathbb{Z}) = (x + y) + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Isomorfismo entre $\mathbb{R}_{2\pi}$ y $\mathbb{T}$

Proposición

Existe una única función $\varphi\colon \mathbb{R}_{2\pi} \to \mathbb{T}$ tal que

$$\varphi(x + 2\pi\mathbb{Z}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

La función φ es un isomorfismo de grupos.

Isomorfismo entre $\mathbb{R}_{2\pi}$ y $\mathbb{T}$

Proposición

Existe una única función $\varphi\colon \mathbb{R}_{2\pi} \to \mathbb{T}$ tal que

$$\varphi(x + 2\pi\mathbb{Z}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

La función φ es un isomorfismo de grupos.

Demostración:

Isomorfismo entre $\mathbb{R}_{2\pi}$ y $\mathbb{T}$

Proposición

Existe una única función $\varphi\colon \mathbb{R}_{2\pi} \to \mathbb{T}$ tal que

$$\varphi(x + 2\pi\mathbb{Z}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

La función φ es un isomorfismo de grupos.

Demostración:

Aplicar la proposición anterior (sobre las propiedades de E)

y el primer teorema de isomorfismos de grupos.

Plan

Adición módulo 2π en $[0, 2\pi)$

En el conjunto $[0, 2\pi)$ definimos una operación binaria $\oplus$ mediante la siguiente regla:

$$a \oplus b := \begin{cases} a + b, & \text{si } a + b < 2\pi; \\ a + b - 2\pi, & \text{si } a + b \geq 2\pi. \end{cases}$$

$[0, 2\pi)$ es un grupo

Proposición

$[0, 2\pi)$ con la operación $\oplus$ es un grupo conmutativo.

La función $\psi\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{R}_{2\pi}$,

$$\psi(x) := x + 2\pi\mathbb{Z},$$

es un isomorfismo de grupos.

Demostración, la propiedad inyectiva

$$\psi\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{R}_{2\pi}, \qquad \psi(x) := x + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Demostración, la propiedad inyectiva

$$\psi\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{R}_{2\pi}, \qquad \psi(x) := x + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Mostremos que ψ es inyectiva.

Demostración, la propiedad inyectiva

$$\psi\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{R}_{2\pi}, \qquad \psi(x) := x + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Mostremos que ψ es inyectiva.

Si $a, b \in [0, 2\pi)$ y $a < b$, entonces $0 < b - a < 2\pi$.

Demostración, la propiedad inyectiva

$$\psi\colon [0,2\pi) \to \mathbb{R}_{2\pi}, \qquad \psi(x) := x + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Mostremos que ψ es inyectiva.

Si $a, b \in [0, 2\pi)$ y $a < b$, entonces $0 < b - a < 2\pi$.

Por lo tanto, $b - a \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

Demostración, la propiedad inyectiva

$$\psi\colon [0,2\pi) \to \mathbb{R}_{2\pi}, \qquad \psi(x) := x + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Mostremos que ψ es inyectiva.

Si $a, b \in [0, 2\pi)$ y $a < b$, entonces $0 < b - a < 2\pi$.

Por lo tanto, $b - a \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

Como a y b no son congruentes, sus clases de equivalencia son diferentes, y $\psi(a) \neq \psi(b)$.

Demostración, la propiedad suprayectiva

$$\psi\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{R}_{2\pi}, \qquad \psi(x) := x + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Demostración, la propiedad suprayectiva

$$\psi\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{R}_{2\pi}, \qquad \psi(x) := x + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Mostremos que ψ es sobre.

Demostración, la propiedad suprayectiva

$$\psi\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{R}_{2\pi}, \qquad \psi(x) := x + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Mostremos que ψ es sobre. Sea $X \in \mathbb{R}_{2\pi}$.

Demostración, la propiedad suprayectiva

$$\psi\colon [0,2\pi) \to \mathbb{R}_{2\pi}, \qquad \psi(x) := x + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Mostremos que ψ es sobre. Sea $X \in \mathbb{R}_{2\pi}$.

Encontramos $x \in X$.

Demostración, la propiedad suprayectiva

$$\psi\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{R}_{2\pi}, \qquad \psi(x) := x + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Mostremos que ψ es sobre. Sea $X \in \mathbb{R}_{2\pi}$.

Encontramos $x \in X$. Entonces $X = x + 2\pi\mathbb{Z}$.

Demostración, la propiedad suprayectiva

$$\psi\colon [0,2\pi) \to \mathbb{R}_{2\pi}, \qquad \psi(x) := x + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Mostremos que ψ es sobre. Sea $X \in \mathbb{R}_{2\pi}$.

Encontramos $x \in X$. Entonces $X = x + 2\pi\mathbb{Z}$. Pongamos

$$k := \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor, \qquad a := x - 2k\pi.$$

Demostración, la propiedad suprayectiva

$$\psi\colon [0,2\pi) \to \mathbb{R}_{2\pi}, \qquad \psi(x) := x + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Mostremos que ψ es sobre. Sea $X \in \mathbb{R}_{2\pi}$.

Encontramos $x \in X$. Entonces $X = x + 2\pi\mathbb{Z}$. Pongamos

$$k := \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor, \qquad a := x - 2k\pi.$$

Entonces $k \in \mathbb{Z}$,

Demostración, la propiedad suprayectiva

$$\psi\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{R}_{2\pi}, \qquad \psi(x) := x + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Mostremos que ψ es sobre. Sea $X \in \mathbb{R}_{2\pi}$.

Encontramos $x \in X$. Entonces $X = x + 2\pi\mathbb{Z}$. Pongamos

$$k := \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor, \qquad a := x - 2k\pi.$$

Entonces $k \in \mathbb{Z}$,

$$k \le \frac{x}{2\pi} < k + 1,$$

Demostración, la propiedad suprayectiva

$$\psi\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{R}_{2\pi}, \qquad \psi(x) := x + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Mostremos que ψ es sobre. Sea $X \in \mathbb{R}_{2\pi}$.

Encontramos $x \in X$. Entonces $X = x + 2\pi\mathbb{Z}$. Pongamos

$$k := \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor, \qquad a := x - 2k\pi.$$

Entonces $k \in \mathbb{Z}$,

$$k \le \frac{x}{2\pi} < k + 1, \qquad 2k\pi \le x < 2k\pi + 2\pi,$$

Demostración, la propiedad suprayectiva

$$\psi\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{R}_{2\pi}, \qquad \psi(x) := x + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Mostremos que ψ es sobre. Sea $X \in \mathbb{R}_{2\pi}$.

Encontramos $x \in X$. Entonces $X = x + 2\pi\mathbb{Z}$. Pongamos

$$k := \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor, \qquad a := x - 2k\pi.$$

Entonces $k \in \mathbb{Z}$,

$$k \le \frac{x}{2\pi} < k + 1, \qquad 2k\pi \le x < 2k\pi + 2\pi, \qquad 0 \le a < 2\pi.$$

Demostración, la propiedad suprayectiva

$$\psi\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{R}_{2\pi}, \qquad \psi(x) := x + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Mostremos que ψ es sobre. Sea $X \in \mathbb{R}_{2\pi}$.

Encontramos $x \in X$. Entonces $X = x + 2\pi\mathbb{Z}$. Pongamos

$$k := \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor, \qquad a := x - 2k\pi.$$

Entonces $k \in \mathbb{Z}$,

$$k \le \frac{x}{2\pi} < k + 1, \qquad 2k\pi \le x < 2k\pi + 2\pi, \qquad 0 \le a < 2\pi.$$

Como $x = a + 2k\pi$, tenemos que $\psi(a) = \psi(x) = X$.

Demostración, correspondencia de operaciones

Mostremos que ψ convierte la operación $\oplus$ en la adición usual en $\mathbb{R}_{2\pi}$.

Demostración, correspondencia de operaciones

Mostremos que ψ convierte la operación $\oplus$ en la adición usual en $\mathbb{R}_{2\pi}$.

Sean $a, b \in [0, 2\pi)$.

Demostración, correspondencia de operaciones

Mostremos que ψ convierte la operación $\oplus$ en la adición usual en $\mathbb{R}_{2\pi}$.

Sean $a, b \in [0, 2\pi)$.

$$\psi(a) = a + 2\pi\mathbb{Z},$$

Demostración, correspondencia de operaciones

Mostremos que ψ convierte la operación $\oplus$ en la adición usual en $\mathbb{R}_{2\pi}$.

Sean $a, b \in [0, 2\pi)$.

$$\psi(a) = a + 2\pi\mathbb{Z}, \qquad \psi(b) = b + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Demostración, correspondencia de operaciones

Mostremos que ψ convierte la operación $\oplus$ en la adición usual en $\mathbb{R}_{2\pi}$.

Sean $a, b \in [0, 2\pi)$.

$$\psi(a) = a + 2\pi\mathbb{Z}, \qquad \psi(b) = b + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Si $a + b < 2\pi$, entonces $a \oplus b = a + b$ y

$$\psi(a \oplus b) = \psi(a + b) = (a + b) + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Demostración, correspondencia de operaciones

Mostremos que ψ convierte la operación $\oplus$ en la adición usual en $\mathbb{R}_{2\pi}$.

Sean $a, b \in [0, 2\pi)$.

$$\psi(a) = a + 2\pi\mathbb{Z}, \qquad \psi(b) = b + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Si $a + b < 2\pi$, entonces $a \oplus b = a + b$ y

$$\psi(a \oplus b) = \psi(a + b) = (a + b) + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Si $a + b \geq 2\pi$, entonces $a \oplus b = a + b - 2\pi$ y

$$\psi(a \oplus b) = \psi(a + b - 2\pi) = (a + b - 2\pi) + 2\pi\mathbb{Z} = (a + b) + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Demostración, correspondencia de operaciones

Mostremos que ψ convierte la operación $\oplus$ en la adición usual en $\mathbb{R}_{2\pi}$.

Sean $a, b \in [0, 2\pi)$.

$$\psi(a) = a + 2\pi\mathbb{Z}, \qquad \psi(b) = b + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Si $a + b < 2\pi$, entonces $a \oplus b = a + b$ y

$$\psi(a \oplus b) = \psi(a + b) = (a + b) + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Si $a + b \geq 2\pi$, entonces $a \oplus b = a + b - 2\pi$ y

$$\psi(a \oplus b) = \psi(a + b - 2\pi) = (a + b - 2\pi) + 2\pi\mathbb{Z} = (a + b) + 2\pi\mathbb{Z}.$$

En ambos casos, $\psi(a \oplus b) = \psi(a) + \psi(b)$.

Demostración, final

Sabemos que $\mathbb{R}_{2\pi}$ es un grupo.

Demostración, final

Sabemos que $\mathbb{R}_{2\pi}$ es un grupo.

Hemos mostrado que:

- ψ es una biyección,
- ψ convierte la operación $\oplus$ en la operación del grupo $\mathbb{R}_{2\pi}$.

Demostración, final

Sabemos que $\mathbb{R}_{2\pi}$ es un grupo.

Hemos mostrado que:

- ψ es una biyección,
- ψ convierte la operación $\oplus$ en la operación del grupo $\mathbb{R}_{2\pi}$.

Concluimos que $[0, 2\pi)$ con la operación $\oplus$ también es un grupo.

Demostración, final

Sabemos que $\mathbb{R}_{2\pi}$ es un grupo.

Hemos mostrado que:

- ψ es una biyección,
- ψ convierte la operación $\oplus$ en la operación del grupo $\mathbb{R}_{2\pi}$.

Concluimos que $[0, 2\pi)$ con la operación $\oplus$ también es un grupo.

Ahora podemos decir que ψ es un isomorfismo de grupos.

Isomorfismo entre $[0, 2\pi)$ y $\mathbb{T}$

Definimos $\eta\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{T}$,

$$\eta(a) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, a}\,.$$

Isomorfismo entre $[0, 2\pi)$ y $\mathbb{T}$

Definimos $\eta\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{T}$,

$$\eta(a) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, a}\,.$$

Proposición

η es un isomorfismo de grupos.

Isomorfismo entre $[0, 2\pi)$ y $\mathbb{T}$

Definimos $\eta\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{T}$,

$$\eta(a) := e^{\mathrm{i}\, a}\,.$$

Proposición

η es un isomorfismo de grupos.

Demostración:

Isomorfismo entre $[0, 2\pi)$ y $\mathbb{T}$

Definimos $\eta\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{T}$,

$$\eta(a) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, a}\,.$$

Proposición

η es un isomorfismo de grupos.

Demostración:

$$\eta = \varphi \circ \psi.$$

Demostrar las propiedades de η de manera directa

$$\eta\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{T}, \qquad \eta(a) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, a}.$$

Ejercicio.

- Sin usar el grupo $\mathbb{R}_{2\pi}$, demostrar de manera directa que

$$\eta(a \oplus b) = \eta(a)\eta(b).$$

- Sin usar el grupo $\mathbb{R}_{2\pi}$, demostrar que $\mathbb{R}_{2\pi}$ es un grupo y η es un isomorfismo.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{T} & \\
([0,2\pi),\oplus) \arrow[ur, "\eta"] \arrow[rr, "\psi"] & & \mathbb{R}_{2\pi} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}) \arrow[ul, "\varphi"']
\end{tikzcd}
$$

Plan

1. Introducción
2. Grupo $\mathbb{T}$
3. El grupo $\mathbb{R}_{2\pi}$
4. $[0, 2\pi)$ como un grupo
5. Topología
6. Medida

Topología

Proposición

$\mathbb{T}$ con la topología inducida de $\mathbb{C}$ es un espacio topológico compacto.

$\mathbb{T}$ es un grupo topológico.

Topología

Proposición

$\mathbb{T}$ con la topología inducida de $\mathbb{C}$ es un espacio topológico compacto.

$\mathbb{T}$ es un grupo topológico.

Estamos afirmando que la operación del grupo y la inversión son funciones continuas.

Demostración

$\mathbb{T}$ es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{C}$. Por eso $\mathbb{T}$ es compacto.

Demostración

$\mathbb{T}$ es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{C}$. Por eso $\mathbb{T}$ es compacto.

Se sabe que $\mathbb{C}$ es un campo normado:

$$|z+w| \le |z|+|w|, \qquad |z\,w| = |z|\,|w|.$$

Demostración

$\mathbb{T}$ es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{C}$. Por eso $\mathbb{T}$ es compacto.

Se sabe que $\mathbb{C}$ es un campo normado:

$$|z + w| \le |z| + |w|, \qquad |z\,w| = |z|\,|w|.$$

Por eso la multiplicación en $\mathbb{C}$ es una operación continua.

Demostración

$\mathbb{T}$ es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{C}$. Por eso $\mathbb{T}$ es compacto.

Se sabe que $\mathbb{C}$ es un campo normado:

$$|z + w| \le |z| + |w|, \qquad |z\,w| = |z|\,|w|.$$

Por eso la multiplicación en $\mathbb{C}$ es una operación continua.

Por consecuencia, es continua su restricción a $\mathbb{T}$.

Demostración

$\mathbb{T}$ es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{C}$. Por eso $\mathbb{T}$ es compacto.

Se sabe que $\mathbb{C}$ es un campo normado:

$$|z+w| \le |z| + |w|, \qquad |z\,w| = |z|\,|w|.$$

Por eso la multiplicación en $\mathbb{C}$ es una operación continua.

Por consecuencia, es continua su restricción a $\mathbb{T}$.

Sabemos que operación de inversión, $z \mapsto z^{-1}$, es continua en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Demostración

$\mathbb{T}$ es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{C}$. Por eso $\mathbb{T}$ es compacto.

Se sabe que $\mathbb{C}$ es un campo normado:

$$|z + w| \le |z| + |w|, \qquad |z\,w| = |z|\,|w|.$$

Por eso la multiplicación en $\mathbb{C}$ es una operación continua.

Por consecuencia, es continua su restricción a $\mathbb{T}$.

Sabemos que operación de inversión, $z \mapsto z^{-1}$, es continua en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Por lo tanto, es continua su restricción a $\mathbb{T}$.

Topología en $\mathbb{R}_{2\pi}$, idea

La topología en $\mathbb{R}_{2\pi}$ se define como la topología del cociente.

Topología en $\mathbb{R}_{2\pi}$, idea

La topología en $\mathbb{R}_{2\pi}$ se define como la topología del cociente.

Si $a \in \mathbb{R}$, entonces los siguientes conjuntos forman una base de vecindades abiertas del punto $a + 2\pi\mathbb{Z}$:

$$(a - \delta, a + \delta) + 2\pi\mathbb{Z} \qquad (\delta > 0).$$

Topología en $\mathbb{R}_{2\pi}$, idea

La topología en $\mathbb{R}_{2\pi}$ se define como la topología del cociente.

Si $a \in \mathbb{R}$, entonces los siguientes conjuntos forman una base de vecindades abiertas del punto $a + 2\pi\mathbb{Z}$:

$$(a-\delta, a+\delta) + 2\pi\mathbb{Z} \qquad (\delta > 0).$$

Se puede demostrar que $\mathbb{R}_{2\pi}$ es un grupo topológico.

Topología en $\mathbb{R}_{2\pi}$, idea

La topología en $\mathbb{R}_{2\pi}$ se define como la topología del cociente.

Si $a \in \mathbb{R}$, entonces los siguientes conjuntos forman una base de vecindades abiertas del punto $a + 2\pi\mathbb{Z}$:

$$(a - \delta, a + \delta) + 2\pi\mathbb{Z} \qquad (\delta > 0).$$

Se puede demostrar que $\mathbb{R}_{2\pi}$ es un grupo topológico.

Se puede demostrar que $\varphi\colon \mathbb{R}_{2\pi} \to \mathbb{T}$ es un homeomorfismo.

Topología especial en $[0, 2\pi)$, idea

Definimos en $[0, 2\pi)$ una topología no canónica.

Topología especial en $[0, 2\pi)$, idea

Definimos en $[0, 2\pi)$ una topología no canónica.

Para cada a en $(0, 2\pi)$, tomamos los siguientes conjuntos como una base de vecindades abiertas del punto a:

$$(a - \delta, a + \delta), \qquad \text{donde} \qquad 0 < \delta < \min(a, 2\pi - a).$$

Topología especial en $[0, 2\pi)$, idea

Definimos en $[0, 2\pi)$ una topología no canónica.

Para cada a en $(0, 2\pi)$, tomamos los siguientes conjuntos como una base de vecindades abiertas del punto a:

$$(a-\delta, a+\delta), \qquad \text{donde} \qquad 0 < \delta < \min(a, 2\pi - a).$$

Tomamos los siguientes conjuntos como una base de vecindades abiertas del punto 0:

$$[0, \delta) \cup (2\pi - \delta, 2\pi), \qquad \text{donde} \qquad 0 < \delta < \pi.$$

Propiedades de $[0, 2\pi)$ con esta topología, sin demostración

Se puede demostrar que $[0, 2\pi)$ con la operación $\oplus$ y con esta topología es un grupo topológico.

Propiedades de $[0, 2\pi)$ con esta topología, sin demostración

Se puede demostrar que $[0, 2\pi)$ con la operación $\oplus$ y con esta topología es un grupo topológico.

Se puede demostrar que ψ y η son homeomorfismos.

Plan

Medida normalizada en $[0, 2\pi)$

Denotemos por $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ y $\mu_{\mathbb{R}}$ a la σ-álgebra de Lebesgue y a la medida de Lebesgue.

Medida normalizada en $[0, 2\pi)$

Denotemos por $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ y $\mu_{\mathbb{R}}$ a la σ-álgebra de Lebesgue y a la medida de Lebesgue.

Denotemos por ν la medida de Lebesgue restringida a $[0, 2\pi)$ y normalizada.

Medida normalizada en $[0, 2\pi)$

Denotemos por $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ y $\mu_{\mathbb{R}}$ a la σ-álgebra de Lebesgue y a la medida de Lebesgue.

Denotemos por ν la medida de Lebesgue restringida a $[0, 2\pi)$ y normalizada.

Para cada $A \subseteq [0, 2\pi)$, tal que $A \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$,

$$\nu(A) := \frac{\mu_{\mathbb{R}}(A)}{2\pi}.$$

Invarianza de ν bajo traslaciones

Se puede demostrar que si $x \in [0, 2\pi)$, $A \subseteq [0, 2\pi)$ y $A \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$, entonces

$$\nu(x \oplus A) = \nu(A).$$

Invarianza de ν bajo traslaciones

Se puede demostrar que si $x \in [0, 2\pi)$, $A \subseteq [0, 2\pi)$ y $A \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$, entonces

$$\nu(x \oplus A) = \nu(A).$$

Además, $\nu([0, 2\pi)) = 1$.

Invarianza de ν bajo traslaciones

Se puede demostrar que si $x \in [0, 2\pi)$, $A \subseteq [0, 2\pi)$ y $A \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$, entonces

$$\nu(x \oplus A) = \nu(A).$$

Además, $\nu([0, 2\pi)) = 1$.

Se puede demostrar que ν es la única medida en $\mathcal{F}_{\mathbb{R}} \cap \mathcal{P}([0, 2\pi))$ con estas propiedades.

Medida en $\mathbb{T}$

La medida canónica en $\mathbb{T}$ se puede definir como la imagen de la medida ν bajo η:

$$\mu_{\mathbb{T}}(B) \coloneqq \nu(\eta^{-1}[B]).$$

Medida en $\mathbb{T}$

La medida canónica en $\mathbb{T}$ se puede definir como la imagen de la medida ν bajo η:

$$\mu_{\mathbb{T}}(B) := \nu(\eta^{-1}[B]).$$

De manera más explícita,

$$\mu_{\mathbb{T}}(B) = \frac{\mu_{\mathbb{R}}\left(\{x \in [0, 2\pi) \colon \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} \in B\}\right)}{2\pi}.$$

Medida en $\mathbb{T}$

La medida canónica en $\mathbb{T}$ se puede definir como la imagen de la medida ν bajo η:

$$\mu_{\mathbb{T}}(B) := \nu(\eta^{-1}[B]).$$

De manera más explícita,

$$\mu_{\mathbb{T}}(B) = \frac{\mu_{\mathbb{R}}\left(\left\{x \in [0, 2\pi) \colon \quad e^{\mathrm{i}\, x} \in B\right\}\right)}{2\pi}.$$

$\mu_{\mathbb{T}}$ es invariante bajo rotaciones.

Medida en $\mathbb{R}_{2\pi}$

La medida canónica en $\mathbb{R}_{2\pi}$ se puede definir como la imagen de la medida ν bajo ψ:

$$\mu_{\mathbb{R}_{2\pi}}(C) := \nu(\varphi^{-1}[C]).$$

Medida en $\mathbb{R}_{2\pi}$

La medida canónica en $\mathbb{R}_{2\pi}$ se puede definir como la imagen de la medida ν bajo ψ:

$$\mu_{\mathbb{R}_{2\pi}}(C) := \nu(\varphi^{-1}[C]).$$

En otras palabras,

$$\mu_{\mathbb{R}_{2\pi}}(C) = \frac{\mu_{\mathbb{R}}\left(\{x \in [0, 2\pi) : \ x + 2\pi\mathbb{Z} \in C\}\right)}{2\pi}.$$

Medida en $\mathbb{R}_{2\pi}$

La medida canónica en $\mathbb{R}_{2\pi}$ se puede definir como la imagen de la medida ν bajo ψ:

$$\mu_{\mathbb{R}_{2\pi}}(C) := \nu(\varphi^{-1}[C]).$$

En otras palabras,

$$\mu_{\mathbb{R}_{2\pi}}(C) = \frac{\mu_{\mathbb{R}}\left(\{x \in [0, 2\pi) \colon \ x + 2\pi\mathbb{Z} \in C\}\right)}{2\pi}.$$

$\mu_{\mathbb{R}_{2\pi}}$ es invariante bajo traslaciones.

Ventajas de cada uno de estos grupos

Ventajas de $\mathbb{T}$:

- es simple la operación del grupo,
- es simple la topología.

Ventajas de cada uno de estos grupos

Ventajas de $\mathbb{T}$:

- es simple la operación del grupo,
- es simple la topología.

Ventajas de $\mathbb{R}_{2\pi}$:

- la operación del grupo y la topología se definen por medio de procedimientos estándares.

Ventajas de cada uno de estos grupos

Ventajas de $\mathbb{T}$:

- es simple la operación del grupo,
- es simple la topología.

Ventajas de $\mathbb{R}_{2\pi}$:

- la operación del grupo y la topología se definen por medio de procedimientos estándares.

Ventajas de $[0, 2\pi)$:

- es un conjunto muy simple,
- se define de manera simple la medida ν,
- la operación del grupo es cómoda para programar.

Moraleja final

Pregunta final:

¿cuál de estos grupos isomorfos es el mejor?

Moraleja final

Pregunta final:

¿cuál de estos grupos isomorfos es el mejor?

Respuesta:

es el mismo grupo, no hay ninguna diferencia.

Moraleja final

Pregunta final:

¿cuál de estos grupos isomorfos es el mejor?

Respuesta:

es el mismo grupo, no hay ninguna diferencia.

Es importante siempre tener en la mente todas estas tres formas equivalentes.