Cotas superiores e inferiores

Objetivos. Repasar las nociones de las cotas superiores e inferiores.

Requisitos. Eje real extendido, propiedades de las desigualdades.

Cotas superiores e inferiores, máximos y mínimos

1. Definición (cota superior de un conjunto). Sea $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Un elemento $b \in \overline{\mathbb{R}}$ se llama *cota superior* de A si $a \le b$ para todo $a \in A$.

2. Notación (el conjunto de todas las cotas superiores de un conjunto). Sea $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Denotemos por $\mathrm{CS}(A)$ al conjunto de todas las cotas superiores de A:

$$\mathrm{CS}(A) \coloneqq \{b \in \overline{\mathbb{R}}: \quad \forall a \in A \quad a \le b\}.$$

3. Ejemplo. 7 es una cota superior del conjunto $[-3, 4]$, esto es, $7 \in \mathrm{CS}([-3, 4])$.

4. $+\infty$ como una cota superior universal. Para cualquier conjunto $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, el elemento $+\infty$ es una cota superior de A:

$$\forall A \subset \overline{\mathbb{R}} \qquad +\infty \in \mathrm{CS}(A).$$

5. Ejercicio. Escriba la definición de una cota inferior de un conjunto. Para el conjunto de las cotas inferiores de un conjunto A usamos la notación $\mathrm{CI}(A)$.

6. Ejemplo. $\mathrm{CS}([-7, 4)) = [4, +\infty]$, $\mathrm{CI}([-7, 4)) = [-\infty, -7]$.

7. Ejercicio. Encuentre $\mathrm{CS}(A)$ y $\mathrm{CI}(A)$ para cada uno de los siguientes conjuntos:

$$A = (2, 5), \qquad A = (2, 5], \qquad A = [2, 5], \qquad A = [-3, +\infty), \qquad A = [-1, 7) \cup [9, 11],$$
$$A = \mathbb{R}, \qquad A = \overline{\mathbb{R}}, \qquad A = \{-\infty\}, \qquad A = (-\infty, 3] \cup (4, +\infty].$$

8. Muestre que cualquier $b \in \overline{\mathbb{R}}$ es una cota superior de $\varnothing$ y al mismo tiempo es una cota inferior de $\varnothing$. En otras palabras, $\mathrm{CS}(\varnothing) = \mathrm{CI}(\varnothing) = \overline{\mathbb{R}}$.

9. Sean $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ y $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Escriba de manera formal (con cuantificadores) la siguiente afirmación: b no es cota superior de A.

10. Sean $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ y $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Escriba de manera formal (con cuantificadores) la siguiente afirmación: b no es cota inferior de A.

11. Monotonía del conjunto de las cotas superiores. Sean $A, B \subset \overline{\mathbb{R}}$ tales que $A \subset B$. Demuestre que $\mathrm{CS}(B) \subset \mathrm{CS}(A)$.

Conjuntos acotados superiormente o inferiormente

12. Definición (conjunto acotado superiormente). Un conjunto $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ se llama *acotado superiormente* si existe una cota superior finita de A:

$$A \text{ es acotado superiormente} \qquad \overset{\text{def}}{\iff} \qquad \operatorname{CS}(A) \cap \mathbb{R} \neq \varnothing.$$

13. Sea $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Muestre que A no es acotado superiormente si, y sólo si, $\operatorname{CS}(A) = \{+\infty\}$.

14. Ejercicio. Escriba la definición de conjunto acotado inferiomente.

15. Ejercicio. Demuestre que el conjunto $\mathbb{Z}$ no está acotado superiormente.

16. Ejercicio. Demuestre que el conjunto $\mathbb{Q}$ no es acotado superiormente.

Elemento máximo y elemento mínimo de un conjunto

17. Definición (elemento máximo de un conjunto). Sea $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Un elemento b se llama *elemento máximo* de A si $b \in A$ y $a \leq b$ para todo $a \in A$.

18. Relación entre elemento máximo y cota superior. b es un elemento máximo de A si y sólo si $b \in A$ y b es una cota superior de A:

$$b \text{ es un elemento máximo de } A \qquad \iff \qquad b \in A \cap \operatorname{CS}(A).$$

19. Unicidad del elemento máximo. Si $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ y existe un elemento máximo de A, entonces este es único.

20. Ejercicio. Escriba la definición del elemento mínimo.

21. Ejemplos. Para cada uno de los siguientes conjuntos, describa sus cotas superiores, cotas inferiores, máximos y mínimos:

1. $(-7, 3]$.
2. $\left\{\dfrac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\right\}$.
3. $(3, 5) \cup [6, 8]$.