

Cotas superiores e inferiores

Objetivos. Repasar las nociones de las cotas superiores e inferiores.

Requisitos. Eje real extendido, propiedades de las desigualdades.

Cotas superiores e inferiores, máximos y mínimos

1 Definición (cota superior de un conjunto). Sea $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Un elemento $b \in \overline{\mathbb{R}}$ se llama *cota superior* de A si $a \leq b$ para todo $a \in A$.

2 Definición (el conjunto de todas las cotas superiores de un conjunto). Sea $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Denotemos por $\text{CS}(A)$ al conjunto de todas las cotas superiores de A :

$$\text{CS}(A) := \{b \in \overline{\mathbb{R}} : \forall a \in A \quad a \leq b\}.$$

3 Ejemplo. 7 es una cota superior del conjunto $[-3, 4]$, esto es, $7 \in \text{CS}([-3, 4])$.

4 Ejemplo ($+\infty$ es una cota superior universal). Para cualquier conjunto $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, el elemento $+\infty$ es una cota superior de A :

$$\forall A \subseteq \overline{\mathbb{R}} \quad +\infty \in \text{CS}(A).$$

5 Ejercicio. Escriba la definición de una cota inferior de un conjunto. Para el conjunto de las cotas inferiores de un conjunto A usamos la notación $\text{CI}(A)$.

6 Ejemplo. $\text{CS}([-7, 4]) = [4, +\infty]$, $\text{CI}([-7, 4]) = [-\infty, -7]$.

7 Ejercicio. Encuentre $\text{CS}(A)$ y $\text{CI}(A)$ para cada uno de los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} A = (2, 5), \quad A = [2, 5], \quad A = [2, 5], \quad A = [-3, +\infty), \quad A = [-1, 7) \cup [9, 11], \\ A = \mathbb{R}, \quad A = \overline{\mathbb{R}}, \quad A = \{-\infty\}, \quad A = (-\infty, 3] \cup (4, +\infty]. \end{aligned}$$

8 Ejercicio. Muestre que cualquier b en $\overline{\mathbb{R}}$ es una cota superior de \emptyset y al mismo tiempo es una cota inferior de \emptyset . En otras palabras,

$$\text{CS}(\emptyset) = \text{CI}(\emptyset) = \overline{\mathbb{R}}.$$

9 Ejercicio. Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ y $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Escriba de manera formal (con cuantificadores) la siguiente afirmación: b no es cota superior de A .

10 Ejercicio. Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ y $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Escriba de manera formal (con cuantificadores) la siguiente afirmación: b no es cota inferior de A .

11 Ejercicio (monotonía del conjunto de las cotas superiores). Sean $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ tales que $A \subseteq B$. Demuestre que $\text{CS}(B) \subseteq \text{CS}(A)$.

Conjuntos acotados superiormente o inferiormente

12 Definición (conjunto acotado superiormente). Un conjunto $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ se llama *acotado superiormente* si existe una cota superior finita de A :

$$A \text{ es acotado superiormente} \quad \stackrel{\text{def}}{\iff} \quad \text{CS}(A) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset.$$

13 Ejercicio. Sea $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Muestre que A no es acotado superiormente si, y sólo si, $\text{CS}(A) = \{+\infty\}$.

14 Ejercicio. Escriba la definición de conjunto acotado inferiormente.

15 Ejercicio. Demuestre que el conjunto \mathbb{Z} no es acotado superiormente.

16 Ejercicio. Demuestre que el conjunto \mathbb{Q} no es acotado superiormente.

Elemento máximo y elemento mínimo de un conjunto

17 Definición (elemento máximo de un conjunto). Sea $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Un elemento b se llama *elemento máximo* de A si $b \in A$ y $a \leq b$ para todo $a \in A$.

18 Proposición (relación entre elemento máximo y cota superior). *b es un elemento máximo de A si y sólo si $b \in A$ y b es una cota superior de A :*

$$b \text{ es un elemento máximo de } A \quad \iff \quad b \in A \cap \text{CS}(A).$$

19 Proposición (unicidad del elemento máximo). *Si $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ y existe un elemento máximo de A , entonces este es único.*

20 Ejercicio. Escriba la definición del elemento mínimo.

21 Ejercicio. Para cada uno de los siguientes conjuntos, describa sus cotas superiores, cotas inferiores, máximos y mínimos:

1. $(-7, 3]$.
2. $\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$.
3. $(3, 5) \cup [6, 8]$.