La medida de Haar y los caracteres del grupo $\mathbb{T}$ (un tema de Análisis Armónico)

Egor Maximenko

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

2021-09-28

1. Los grupos $\mathbb{T}$ y $\mathbb{R}/(a\mathbb{Z})$, $a > 0$

Plan

1. Los grupos $\mathbb{T}$ y $\mathbb{R}/(a\mathbb{Z})$, $a > 0$

$$\mathbb{T} \; := \; \{t \in \mathbb{C}\colon \; |t| = 1\}.$$

$$\mathbb{T} \;:=\; \{t \in \mathbb{C} \colon\; |t| = 1\}.$$

Se considera con la operación de multiplicación de números complejos.

$\mathbb{T} \ := \ \{t \in \mathbb{C}\colon \ |t| = 1\}.$

Se considera con la operación de multiplicación de números complejos.

Es un grupo conmutativo.

$\mathbb{T} \;:=\; \{t \in \mathbb{C}\colon\; |t| = 1\}.$

Se considera con la operación de multiplicación de números complejos.

Es un grupo conmutativo.

Se considera con la topología inducida de $\mathbb{C}$.

$\mathbb{T} := \{t \in \mathbb{C} \colon \ |t| = 1\}.$

Se considera con la operación de multiplicación de números complejos.

Es un grupo conmutativo.

Se considera con la topología inducida de $\mathbb{C}$.

Es un espacio de Hausdorff compacto.

$\mathbb{T} \ := \ \{t \in \mathbb{C}\colon \ |t| = 1\}.$

Se considera con la operación de multiplicación de números complejos.

Es un grupo conmutativo.

Se considera con la topología inducida de $\mathbb{C}$.

Es un espacio de Hausdorff compacto.

La multiplicación es continua respecto a la topología.

$\mathbb{T} \;:=\; \{t \in \mathbb{C}\colon\; |t| = 1\}.$

Se considera con la operación de multiplicación de números complejos.

Es un grupo conmutativo.

Se considera con la topología inducida de $\mathbb{C}$.

Es un espacio de Hausdorff compacto.

La multiplicación es continua respecto a la topología.

Resumen: $\mathbb{T}$ es un grupo compacto abeliano.

El conjunto $\mathbb{R}/(a\mathbb{Z})$, donde $a > 0$

Recordemos que $\mathbb{R}$ con la operación $+$ es un grupo conmutativo.

El conjunto $\mathbb{R}/(a\mathbb{Z})$, donde $a > 0$

Recordemos que $\mathbb{R}$ con la operación $+$ es un grupo conmutativo.

Sea $a > 0$. Entonces $a\mathbb{Z}$ es un subgrupo de $\mathbb{R}$.

El conjunto $\mathbb{R}/(a\mathbb{Z})$, donde $a > 0$

Recordemos que $\mathbb{R}$ con la operación $+$ es un grupo conmutativo.

Sea $a > 0$. Entonces $a\mathbb{Z}$ es un subgrupo de $\mathbb{R}$.

Denotamos por $\overset{a}{\equiv}$ la congruencia módulo a:

$$x \overset{a}{\equiv} y \qquad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad x - y \in a\mathbb{Z}.$$

Es una relación de equivalencia.

El conjunto $\mathbb{R}/(a\mathbb{Z})$, donde $a > 0$

Recordemos que $\mathbb{R}$ con la operación $+$ es un grupo conmutativo.

Sea $a > 0$. Entonces $a\mathbb{Z}$ es un subgrupo de $\mathbb{R}$.

Denotamos por $\overset{a}{\equiv}$ la congruencia módulo a:

$$x \overset{a}{\equiv} y \qquad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad x - y \in a\mathbb{Z}.$$

Es una relación de equivalencia.

Las clases de congruencia son de la forma $x + a\mathbb{Z}$, donde $x \in \mathbb{R}$.

El conjunto $\mathbb{R}/(a\mathbb{Z})$, donde $a > 0$

Recordemos que $\mathbb{R}$ con la operación $+$ es un grupo conmutativo.

Sea $a > 0$. Entonces $a\mathbb{Z}$ es un subgrupo de $\mathbb{R}$.

Denotamos por $\overset{a}{\equiv}$ la congruencia módulo a:

$$x \overset{a}{\equiv} y \qquad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad x - y \in a\mathbb{Z}.$$

Es una relación de equivalencia.

Las clases de congruencia son de la forma $x + a\mathbb{Z}$, donde $x \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{R}/(a\mathbb{Z}) :=$ el conjunto de las clases de congruencia.

El grupo cociente $\mathbb{R}/(a\mathbb{Z})$, donde $a > 0$

El grupo cociente $\mathbb{R}/(a\mathbb{Z})$, donde $a > 0$

La operación $+$ en $\mathbb{R}/(a\mathbb{Z})$ se puede definir por la siguiente regla:

$$X + Y := \{z \in \mathbb{R}: \quad \exists x \in X \quad \exists y \in Y \quad z = x + y\}.$$

El grupo cociente $\mathbb{R}/(a\mathbb{Z})$, donde $a > 0$

La operación $+$ en $\mathbb{R}/(a\mathbb{Z})$ se puede definir por la siguiente regla:

$$X + Y := \{z \in \mathbb{R} \colon \quad \exists x \in X \quad \exists y \in Y \quad z = x + y\}.$$

Proposición:

$$(x + a\mathbb{Z}) + (y + a\mathbb{Z}) = (x + y) + a\mathbb{Z}.$$

El grupo cociente $\mathbb{R}/(a\mathbb{Z})$, donde $a > 0$

La operación $+$ en $\mathbb{R}/(a\mathbb{Z})$ se puede definir por la siguiente regla:

$$X + Y := \{z \in \mathbb{R} : \quad \exists x \in X \quad \exists y \in Y \quad z = x + y\}.$$

Proposición:

$$(x + a\mathbb{Z}) + (y + a\mathbb{Z}) = (x + y) + a\mathbb{Z}.$$

Esta fórmula implica fácilmente que $\mathbb{R}/(a\mathbb{Z})$ es un grupo conmutativo.

Propiedades de la función $x \mapsto \exp \frac{2\pi\,\mathrm{i}\,x}{a}$

Definimos $\Delta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$,

$$\Delta(x) \coloneqq \exp \frac{2\pi\,\mathrm{i}\,x}{a}.$$

Propiedades de la función $x \mapsto \exp \frac{2\pi \mathrm{i}\, x}{a}$

Definimos $\Delta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$,

$$\Delta(x) := \exp \frac{2\pi \mathrm{i}\, x}{a}.$$

Por las propiedades de la función exp, es fácil ver que

$$\Delta[\mathbb{R}] =$$

Propiedades de la función $x \mapsto \exp \frac{2\pi \mathrm{i}\, x}{a}$

Definimos $\Delta \colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$,

$$\Delta(x) := \exp \frac{2\pi \mathrm{i}\, x}{a}.$$

Por las propiedades de la función exp, es fácil ver que

$$\Delta[\mathbb{R}] = \mathbb{T}.$$

Más aún,

$$x \in \ker(\Delta) \quad \Longleftrightarrow$$

Propiedades de la función $x \mapsto \exp \frac{2\pi \mathrm{i}\, x}{a}$

Definimos $\Delta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$,

$$\Delta(x) := \exp \frac{2\pi \mathrm{i}\, x}{a}.$$

Por las propiedades de la función exp, es fácil ver que

$$\Delta[\mathbb{R}] = \mathbb{T}.$$

Más aún,

$$x \in \ker(\Delta) \quad \Longleftrightarrow \quad \exp \frac{2\pi \mathrm{i}\, x}{a} = 1 \quad \Longleftrightarrow$$

Propiedades de la función $x \mapsto \exp \frac{2\pi \mathrm{i}\, x}{a}$

Definimos $\Delta \colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$,

$$\Delta(x) := \exp \frac{2\pi \mathrm{i}\, x}{a}.$$

Por las propiedades de la función exp, es fácil ver que

$$\Delta[\mathbb{R}] = \mathbb{T}.$$

Más aún,

$$x \in \ker(\Delta) \quad \Longleftrightarrow \quad \exp \frac{2\pi \mathrm{i}\, x}{a} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2\pi x}{a}$$

Propiedades de la función $x \mapsto \exp \frac{2\pi \mathrm{i}\, x}{a}$

Definimos $\Delta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$,

$$\Delta(x) := \exp \frac{2\pi \mathrm{i}\, x}{a}.$$

Por las propiedades de la función exp, es fácil ver que

$$\Delta[\mathbb{R}] = \mathbb{T}.$$

Más aún,

$$x \in \ker(\Delta) \quad \Longleftrightarrow \quad \exp \frac{2\pi \mathrm{i}\, x}{a} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2\pi x}{a} \in 2\pi\mathbb{Z} \quad \Longleftrightarrow$$

Propiedades de la función $x \mapsto \exp \frac{2\pi \mathrm{i}\, x}{a}$

Definimos $\Delta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$,

$$\Delta(x) := \exp \frac{2\pi \mathrm{i}\, x}{a}.$$

Por las propiedades de la función exp, es fácil ver que

$$\Delta[\mathbb{R}] = \mathbb{T}.$$

Más aún,

$$x \in \ker(\Delta) \quad \Longleftrightarrow \quad \exp \frac{2\pi \mathrm{i}\, x}{a} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2\pi x}{a} \in 2\pi\mathbb{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in a\mathbb{Z}.$$

Propiedades de la función $x \mapsto \exp \frac{2\pi \mathrm{i} x}{a}$

Definimos $\Delta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$,

$$\Delta(x) := \exp \frac{2\pi \mathrm{i} x}{a}.$$

Por las propiedades de la función exp, es fácil ver que

$$\Delta[\mathbb{R}] = \mathbb{T}.$$

Más aún,

$$x \in \ker(\Delta) \quad \Longleftrightarrow \quad \exp \frac{2\pi \mathrm{i} x}{a} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2\pi x}{a} \in 2\pi\mathbb{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in a\mathbb{Z}.$$

Hemos mostrado que $\ker(\Delta) =$

Propiedades de la función $x \mapsto \exp \frac{2\pi \mathrm{i}\, x}{a}$

Definimos $\Delta \colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$,

$$\Delta(x) := \exp \frac{2\pi \mathrm{i}\, x}{a}.$$

Por las propiedades de la función exp, es fácil ver que

$$\Delta[\mathbb{R}] = \mathbb{T}.$$

Más aún,

$$x \in \ker(\Delta) \quad \Longleftrightarrow \quad \exp \frac{2\pi \mathrm{i}\, x}{a} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2\pi x}{a} \in 2\pi\mathbb{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in a\mathbb{Z}.$$

Hemos mostrado que $\ker(\Delta) = a\mathbb{Z}$.

La isomorfía $\mathbb{R}/(a\mathbb{Z}) \sim \mathbb{T}$

$\Delta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$,

$$\Delta(x) := \exp \frac{2\pi\,\mathrm{i}\,x}{a}.$$

Hemos mostrado que

$$\Delta[\mathbb{R}] = \mathbb{T}, \qquad \ker(\Delta) = a\mathbb{Z}.$$

La isomorfía $\mathbb{R}/(a\mathbb{Z}) \sim \mathbb{T}$

$\Delta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$,

$$\Delta(x) := \exp \frac{2\pi\,\mathrm{i}\,x}{a}.$$

Hemos mostrado que

$$\Delta[\mathbb{R}] = \mathbb{T}, \qquad \ker(\Delta) = a\mathbb{Z}.$$

Definimos $\Upsilon\colon \mathbb{R}/(a\mathbb{Z}) \to \mathbb{T}$,

$$\Upsilon(x + a\mathbb{Z}) := \Delta(x).$$

Por el primer teorema de isomorfismos, Υ es un isomorfismo.

La isomorfía $\mathbb{R}/(a\mathbb{Z}) \sim \mathbb{T}$

$\Delta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$,

$$\Delta(x) := \exp\frac{2\pi\,\mathrm{i}\,x}{a}.$$

Hemos mostrado que

$$\Delta[\mathbb{R}] = \mathbb{T}, \qquad \ker(\Delta) = a\mathbb{Z}.$$

Definimos $\Upsilon\colon \mathbb{R}/(a\mathbb{Z}) \to \mathbb{T}$,

$$\Upsilon(x + a\mathbb{Z}) := \Delta(x).$$

Por el primer teorema de isomorfismos, Υ es un isomorfismo.

Mini-tarea: demostrar que Υ es un homeomorfismo.

Funciones a-periódicas

$$\Delta(x) := \exp\frac{2\pi\,\mathrm{i}\,x}{a}.$$

Funciones a-periódicas

$$\Delta(x) \coloneqq \exp \frac{2\pi \mathrm{i}\, x}{a}.$$

Sea $g\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$. Definimos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$f(x) \coloneqq g(\Delta(x)).$$

Funciones a-periódicas

$$\Delta(x) := \exp \frac{2\pi \,\mathrm{i}\, x}{a}.$$

Sea $g\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$. Definimos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$f(x) := g(\Delta(x)).$$

Entonces f es una función a-periódica.

Funciones a-periódicas

$$\Delta(x) \coloneqq \exp \frac{2\pi \mathrm{i} x}{a}.$$

Sea $g\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$. Definimos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$f(x) \coloneqq g(\Delta(x)).$$

Entonces f es una función a-periódica.

Al revés, si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es una función a-periódica, definimos $g\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$,

$$g(\Delta(x)) \coloneqq f(x).$$

Funciones continuas *a*-periódicas

$$C_{a\text{-per}}(\mathbb{R}) := \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \colon \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+a) = f(x)\}.$$

Funciones continuas a-periódicas

$$C_{a\text{-per}}(\mathbb{R}) := \{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{C})\colon \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+a) = f(x)\}.$$

Definimos $\Xi\colon C(\mathbb{T}) \to C_{a\text{-per}}(\mathbb{R})$,

$$(\Xi(g))(x) := g(\Delta(x)),$$

esto es,

$$(\Xi(g))(x) := g\left(\exp\frac{2\pi\,\mathrm{i}\,x}{a}\right).$$

Funciones continuas a-periódicas

$$C_{a\text{-per}}(\mathbb{R}) := \{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{C})\colon \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+a) = f(x)\}.$$

Definimos $\Xi\colon C(\mathbb{T}) \to C_{a\text{-per}}(\mathbb{R})$,

$$(\Xi(g))(x) := g(\Delta(x)),$$

esto es,

$$(\Xi(g))(x) := g\left(\exp\frac{2\pi\,\mathrm{i}\,x}{a}\right).$$

Mini-tarea: demostrar que $\Xi(g)$ es una biyección.

El grupo $\mathbb{R}_{2\pi}$ y las funciones continuas 2π-periodicas

Un caso particular es $a = 2\pi$.

El grupo $\mathbb{R}_{2\pi}$ y las funciones continuas 2π-periodicas

Un caso particular es $a = 2\pi$.

Usamos la notación breve:

$$\mathbb{R}_{2\pi} := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}).$$

El grupo $\mathbb{R}_{2\pi}$ y las funciones continuas 2π-periodicas

Un caso particular es $a = 2\pi$.

Usamos la notación breve:

$$\mathbb{R}_{2\pi} := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}).$$

$$C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) := \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \colon \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x + 2\pi) = f(x)\}.$$

El grupo $\mathbb{R}_{2\pi}$ y las funciones continuas 2π-periodicas

Un caso particular es $a = 2\pi$.

Usamos la notación breve:

$$\mathbb{R}_{2\pi} := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}).$$

$$C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) := \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \colon \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x + 2\pi) = f(x)\}.$$

Por lo anterior, $C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ se puede identificar con $C(\mathbb{T})$.

La medida de Haar normalizada en $\mathbb{T}$

Sea $\mu_{\mathbb{R}}$ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

La medida de Haar normalizada en $\mathbb{T}$

Sea $\mu_{\mathbb{R}}$ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

Sabemos que $\mu_{\mathbb{R}}$ es invariante bajo las traslaciones:

$$\mu_{\mathbb{R}}(X + y) = \mu_{\mathbb{R}}(X) \qquad (y \in \mathbb{R}).$$

La medida de Haar normalizada en $\mathbb{T}$

Sea $\mu_{\mathbb{R}}$ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

Sabemos que $\mu_{\mathbb{R}}$ es invariante bajo las traslaciones:

$$\mu_{\mathbb{R}}(X+y) = \mu_{\mathbb{R}}(X) \qquad (y \in \mathbb{R}).$$

Denotamos por $\mathcal{B}_{\mathbb{T}}$ la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{T}$.

La medida de Haar normalizada en $\mathbb{T}$

Sea $\mu_{\mathbb{R}}$ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

Sabemos que $\mu_{\mathbb{R}}$ es invariante bajo las traslaciones:

$$\mu_{\mathbb{R}}(X + y) = \mu_{\mathbb{R}}(X) \qquad (y \in \mathbb{R}).$$

Denotamos por $\mathcal{B}_{\mathbb{T}}$ la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{T}$.

Para cada A en $\mathcal{B}_{\mathbb{T}}$,

$$\nu_{\mathbb{T}}(A) := \frac{1}{2\pi}\mu_{\mathbb{R}}\Big(\big\{x \in [0, 2\pi) \colon \quad \exp(\mathrm{i}\, x) \in A\big\}\Big).$$

La medida de Haar normalizada en $\mathbb{T}$

Sea $\mu_{\mathbb{R}}$ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

Sabemos que $\mu_{\mathbb{R}}$ es invariante bajo las traslaciones:

$$\mu_{\mathbb{R}}(X + y) = \mu_{\mathbb{R}}(X) \qquad (y \in \mathbb{R}).$$

Denotamos por $\mathcal{B}_{\mathbb{T}}$ la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{T}$.

Para cada A en $\mathcal{B}_{\mathbb{T}}$,

$$\nu_{\mathbb{T}}(A) := \frac{1}{2\pi}\mu_{\mathbb{R}}\Big(\big\{x \in [0, 2\pi) \colon \quad \exp(\mathrm{i}\,x) \in A\big\}\Big).$$

Ejercicio: demostrar que si $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}$ y $t \in \mathbb{T}$, entonces $\nu_{\mathbb{T}}(tA) = \nu_{\mathbb{T}}(A)$.

Integración de funciones 2π-periódicas

Ejercicio. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función Lebesgue-medible y tal que

$$\int_{[0,2\pi)} |f| \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} < +\infty.$$

Sea X un subconjunto Lebesgue-medible de $\mathbb{R}$, y sea $y \in \mathbb{R}$. Demostrar que

$$\int_{X+2\pi} f \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \int_X f \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}.$$

Sugerencia: empezar con las funciones simples.

Los caracteres del grupo $\mathbb{R}$

Para cada ξ en $\mathbb{R}$, definimos $\eta_\xi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$,

$$\eta_\xi(x) := \exp\left(2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x\right).$$

Los caracteres del grupo $\mathbb{R}$

Para cada ξ en $\mathbb{R}$, definimos $\eta_\xi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$,

$$\eta_\xi(x) := \exp\left(2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x\right).$$

Es fácil ver que η_ξ es un caracter de $\mathbb{R}$.

Los caracteres del grupo $\mathbb{R}$

Para cada ξ en $\mathbb{R}$, definimos $\eta_\xi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$,

$$\eta_\xi(x) := \exp\left(2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x\right).$$

Es fácil ver que η_ξ es un caracter de $\mathbb{R}$.

Teorema (lo demostraremos después): cada caracter de $\mathbb{R}$ es de esta forma.

Los caracteres del grupo $\mathbb{T}$

Dado k en $\mathbb{Z}$, definimos $\rho_k\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$,

$$\rho_k(t) := t^k.$$

Los caracteres del grupo $\mathbb{T}$

Dado k en $\mathbb{Z}$, definimos $\rho_k \colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$,

$$\rho_k(t) := t^k.$$

Es fácil ver que ρ_k es un caracter del grupo $\mathbb{T}$.

Los caracteres del grupo $\mathbb{T}$

Dado k en $\mathbb{Z}$, definimos $\rho_k \colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$,

$$\rho_k(t) := t^k.$$

Es fácil ver que ρ_k es un caracter del grupo $\mathbb{T}$.

Proposición

Cada caracter del grupo $\mathbb{T}$ es de esta forma.

Demostración

Sea $\sigma\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ un caracter de $\mathbb{T}$.

Demostración

Sea $\sigma\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ un caracter de $\mathbb{T}$.

Definimos $\zeta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$,

$$\zeta(x) := \sigma(\exp(\mathrm{i}\, x)).$$

Demostración

Sea $\sigma\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ un caracter de $\mathbb{T}$.

Definimos $\zeta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$,

$$\zeta(x) := \sigma(\exp(\mathrm{i}\, x)).$$

Entonces

$$\zeta(x+y) = \sigma(\exp(\mathrm{i}(x+y))) = \sigma(\exp(\mathrm{i}\, x)\exp(\mathrm{i}\, y)) = \sigma(\exp(\mathrm{i}\, x))\sigma(\exp(\mathrm{i}\, y)) = \zeta(x)\zeta(y).$$

Luego ζ es un caracter de $\mathbb{R}$, y existe ξ en $\mathbb{R}$ tal que

$$\zeta(x) = \exp(2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Hemos mostrado que

$$\sigma(\exp(\mathrm{i}\, x)) = \exp(2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x).$$

Demostración

Hemos mostrado que

$$\sigma(\exp(\mathrm{i}\, x)) = \exp(2\pi\, \mathrm{i}\, \xi x).$$

Demostración

Hemos mostrado que

$$\sigma(\exp(\mathrm{i}\, x)) = \exp(2\pi\, \mathrm{i}\, \xi x).$$

Pongamos $x =$

Demostración

Hemos mostrado que

$$\sigma(\exp(\mathrm{i}\, x)) = \exp(2\pi\, \mathrm{i}\, \xi x).$$

Pongamos $x = 2\pi$:

$$\exp(4\pi^2 \xi\, \mathrm{i}) = \sigma(\exp(2\pi\, \mathrm{i})) = \sigma(1) = 1.$$

Demostración

Hemos mostrado que

$$\sigma(\exp(\mathrm{i}\,x)) = \exp(2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x).$$

Pongamos $x = 2\pi$:

$$\exp(4\pi^2\xi\,\mathrm{i}) = \sigma(\exp(2\pi\,\mathrm{i})) = \sigma(1) = 1.$$

Luego existe k en $\mathbb{Z}$ tal que $4\pi^2\xi = 2\pi k$, esto es, $\xi = \frac{k}{2\pi}$.

Demostración

Hemos mostrado que

$$\sigma(\exp(\mathrm{i}\,x)) = \exp(2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x).$$

Pongamos $x = 2\pi$:

$$\exp(4\pi^2\xi\,\mathrm{i}) = \sigma(\exp(2\pi\,\mathrm{i})) = \sigma(1) = 1.$$

Luego existe k en $\mathbb{Z}$ tal que $4\pi^2\xi = 2\pi k$, esto es, $\xi = \frac{k}{2\pi}$.

Finalmente obtenemos $\sigma(\exp(\mathrm{i}\,x)) = \exp(\mathrm{i}\,kx)$, esto es,

$$\sigma(t) = t^k.$$

Las funciones básicas de Fourier

Hemos demostrado que los caracteres de $\mathbb{T}$ son de la forma

$$\rho_k(t) = t^k.$$

Las funciones básicas de Fourier

Hemos demostrado que los caracteres de $\mathbb{T}$ son de la forma

$$\rho_k(t) = t^k.$$

Convertimos estas funciones en funciones 2π-periódicas.

$$\varphi_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}, \qquad \varphi_k(x) := \exp(k\,\mathrm{i}\,x).$$