Unicidad del EHNR con el núcleo dado

Objetivos. Mostremos que si dos espacio de Hilbert con núcleo reproductor tienen el mismo núcleo reproductor, entonces coinciden.

Prerrequisitos. Concepto de EHNR, la convergencia en EHNR implica la convergencia puntual.

1 Proposición. *Sea X un conjunto y sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert con núcleo reproductor sobre X. Supongamos que H_1 y H_2 tienen el mismo núcleo reproductor $(K_x)_{x\in X}$. Entonces H_1 y H_2 coinciden como conjuntos y tienen el mismo producto interno.*

Demostración. 1. Denotemos por H_0 al conjunto de las combinaciones lineales (finitas) de las funciones K_x con x en X.

$$H_0 \coloneqq \ell(\big\{K_x\colon\ x \in X\big\}).$$

En otras palabras, H_0 es el subespacio vectorial del espacio vectorial $\mathbb{C}^X$ generado por el conjunto de funciones $\{K_x\colon\ x \in X\}$. Por la definición del EHNR, tenemos que $H_0 \le H_1$ y $H_0 \le H_2$.

2. Dados x, y en X, por la propiedad reproductora en H_1 y H_2 tenemos que

$$\langle K_x, K_y\rangle_{H_1} = K_x(y) = \langle K_x, K_y\rangle_{H_2}.$$

3. Dadas f, g en H_0, mostremos que $\langle f, g\rangle_{H_1} = \langle f, g\rangle_{H_2}$. Brevemente, esto se sigue del inciso 2 y de la propiedad sesquilineal. Razonando de manera más detallada, encontramos p, q en $\mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q$ en X, $\xi_1, \ldots, \xi_p, \eta_1, \ldots, \eta_q$ en $\mathbb{C}$ tales que

$$f = \sum_{s=1}^{p} \xi_s K_{x_s}, \qquad g = \sum_{t=1}^{q} \eta_t K_{y_t}.$$

Aplicamos la propiedad sesquilineal del producto interno en H_1, H_2 y el resultado del inciso 2:

$$\langle f, g\rangle_{H_1} = \sum_{s=1}^{p}\sum_{t=1}^{q} \xi_s \overline{\eta_t} \langle K_{x_s}, K_{y_t}\rangle_{H_1} = \sum_{s=1}^{p}\sum_{t=1}^{q} \xi_s \overline{\eta_t} \langle K_{x_s}, K_{y_t}\rangle_{H_2} = \langle f, g\rangle_{H_2}.$$

4. Mostremos que $H_1 \subseteq H_2$. La contención $H_2 \subseteq H_1$ se demuestra de manera similar. Sea $f \in H_1$. Ya sabemos que $H_1 = \operatorname{cl}_{H_1}(H_0)$, donde la cerradura se entiende en la topología

inducida por la norma de H_1. Encontramos una sucesión $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \in H_0^{\mathbb{N}}$ tal que $\|u_j - f\|_{H_1} \to 0$ cuando $j \to \infty$. Entonces $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy respecto a la norma $\|\cdot\|_{H_1}$. Debido al resultado del inciso 3, $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es también una sucesión de Cauchy respecto a la norma $\|\cdot\|_{H_2}$. Como H_2 es completo, existe g en H_2 tal que $\|u_j - g\|_{H_2} \to 0$ cuando $j \to \infty$. Pero ya sabemos que la convergencia en H_1 o en H_2 implica la convergencia puntual. Entonces, para cada x en X,

$$f(x) = \lim_{j\to\infty} u_j(x) = g(x).$$

Hemos mostrado que $f = g \in H_2$.

5. Mostremos que $\|\cdot\|_{H_1} = \|\cdot\|_{H_2}$. Sea $f \in H_1 = H_2$. Encontramos una sucesión $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ en H_0 tal que $\|u_j - f\|_{H_1} \to 0$ cuando $j \to \infty$. Como ya vimos en el inciso 4, $\|u_j - f\|_{H_2} \to 0$ cuando $j \to \infty$. Luego, por la continuidad de la norma en H_1 la continuidad de la norma en H_2 y el resultado del inciso 3,

$$\|f\|_{H_1} = \lim_{j\to\infty} \|u_j\|_{H_1} = \lim_{j\to\infty} \|u_j\|_{H_2} = \|f\|_{H_2}.$$

6. La igualdad $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H_1} = \langle\cdot,\cdot\rangle_{H_2}$ se puede demostrar de manera similar al inciso 5, o se puede deducir del inciso 5 usando la identidad de polarización. $\square$