La unión de una colección de conjuntos
(un tema de la teoría de conjuntos)

Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

20 de agosto de 2022

Objetivos.

- Conocer o repasar el concepto de la unión de una colección de conjuntos.
- Conocer algunas propiedades de este concepto.

Prerrequisitos.

- Operaciones con familias de conjuntos.
- Conjuntos de conjuntos.
- Imágenes de conjuntos bajo funciones.

La unión de una colección de conjuntos (repaso)

Definición

Sea X un conjunto y sea $\gamma \subseteq 2^X$. El conjunto $\cup\gamma$ se define como

$$\cup\gamma := \{x \in X \colon \quad \exists B \in \gamma \quad x \in B\}.$$

La unión de una colección finita de conjuntos

Ejercicio. Sea X un conjunto, sea $m \in \mathbb{N}$ y sean $A_1, \ldots, A_m \subseteq X$. Pongamos

$$\gamma := \{A_1, \ldots, A_m\}.$$

Demostrar que

$$\cup\gamma = \bigcup_{k=1}^{m} A_k.$$

La unión de una colección que consiste de un conjunto

Ejercicio. Sea X un conjunto, sea $A \subseteq X$ y sea

$$\gamma := \{A\}.$$

Demostrar que

$$\cup\gamma = A.$$

Representar la unión de una colección de conjuntos como la unión de una familia idéntica de conjuntos

Ejercicio. Sea X un conjunto y sea $\gamma \subseteq 2^X$. Definimos $f\colon \gamma \to 2^X$,

$$f(B) :=$$

Representar la unión de una colección de conjuntos como la unión de una familia idéntica de conjuntos

Ejercicio. Sea X un conjunto y sea $\gamma \subseteq 2^X$. Definimos $f\colon \gamma \to 2^X$,

$$f(B) \coloneqq B.$$

Representar la unión de una colección de conjuntos como la unión de una familia idéntica de conjuntos

Ejercicio. Sea X un conjunto y sea $\gamma \subseteq 2^X$. Definimos $f\colon \gamma \to 2^X$,

$$f(B) := B.$$

En otras palabras, f es la familia idéntica cuyo conjunto de índices es γ.

Representar la unión de una colección de conjuntos como la unión de una familia idéntica de conjuntos

Ejercicio. Sea X un conjunto y sea $\gamma \subseteq 2^X$. Definimos $f\colon \gamma \to 2^X$,

$$f(B) := B.$$

En otras palabras, f es la familia idéntica cuyo conjunto de índices es γ.

Demostrar que

$$\cup\gamma = \bigcup_{B \in \gamma} f(B).$$

Representar la unión de una colección de conjuntos como la unión de una familia idéntica de conjuntos

Ejercicio. Sea X un conjunto y sea $\gamma \subseteq 2^X$. Definimos $f: \gamma \to 2^X$,

$$f(B) \coloneqq B.$$

En otras palabras, f es la familia idéntica cuyo conjunto de índices es γ.

Demostrar que

$$\cup\gamma = \bigcup_{B\in\gamma} f(B).$$

En una notación más simple,

$$\cup\gamma = \bigcup_{B\in\gamma} B.$$

Representar la unión de una familia de conjuntos como la unión de una colección de conjuntos

Ejercicio. Sea X un conjunto y sea $(f(k))_{k\in J}$ una familia de subconjuntos de X.

Representar la unión de una familia de conjuntos como la unión de una colección de conjuntos

Ejercicio. Sea X un conjunto y sea $(f(k))_{k \in J}$ una familia de subconjuntos de X. Pongamos

$$\gamma :=$$

Representar la unión de una familia de conjuntos como la unión de una colección de conjuntos

Ejercicio. Sea X un conjunto y sea $(f(k))_{k \in J}$ una familia de subconjuntos de X. Pongamos

$$\gamma := f[J].$$

Representar la unión de una familia de conjuntos como la unión de una colección de conjuntos

Ejercicio. Sea X un conjunto y sea $(f(k))_{k\in J}$ una familia de subconjuntos de X. Pongamos

$$\gamma := f[J].$$

Demostrar que

$$\bigcup_{k\in J} f(k) = \cup\gamma.$$

¿Cuándo la unión de una colección está contenida en un conjunto dado?

Proposición

Sean X un conjunto, $\gamma \subseteq 2^X$, $U \subseteq X$. Entonces

$$\cup\gamma \subseteq U \qquad \Longleftrightarrow$$

¿Cuándo la unión de una colección está contenida en un conjunto dado?

Proposición

Sean X un conjunto, $\gamma \subseteq 2^X$, $U \subseteq X$. Entonces

$$\cup\gamma \subseteq U \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall B \in \gamma \qquad B \subseteq U.$$

¿Cuándo la unión de una colección está contenida en un conjunto dado?

Proposición

Sean X un conjunto, $\gamma \subseteq 2^X$, $U \subseteq X$. Entonces

$$\cup\gamma \subseteq U \qquad \iff \qquad \forall B \in \gamma \qquad B \subseteq U.$$

Ejercicio. Demostrar la proposición.

Propiedad creciente de la unión de colecciones de conjuntos

Ejercicio. Sea X un conjunto y sean $\gamma_1, \gamma_2 \subseteq 2^X$ tales que $\gamma_1 \subseteq \gamma_2$. Demostrar que

$$\cup\gamma_1 \subseteq \cup\gamma_2.$$

Sobre la unión de la intersección de dos colecciones de conjuntos

Ejercicio. Demostrar o refutar la siguiente conjetura.

Sea X un conjunto y sean $\gamma_1, \gamma_2 \subseteq 2^X$. Entonces

$$\cup(\gamma_1 \cap \gamma_2) = (\cup\gamma_1) \cap (\cup\gamma_2).$$