# La unión de una colección de conjuntos

**Objetivos.** Conocer o repasar el concepto de la unión de una colección de conjuntos. Conocer algunas propiedades de esta operación.

**Prerrequisitos.** Operaciones con familias de conjuntos, conjuntos de conjuntos, imágenes de conjuntos bajo funciones.

**1 Definición** (la unión de una colección de conjuntos)**.** Sea $X$ un conjunto y sea $\gamma \subseteq 2^X$. El conjunto $\cup\gamma$ se define como

$$\cup\gamma := \big\{x \in X\colon \quad \exists B \in \gamma \quad x \in B\big\}.$$

**2 Ejercicio** (la unión de una colección finita de conjuntos)**.** Sea $X$ un conjunto, sea $m \in \mathbb{N}$ y sean $A_1, \ldots, A_m \subseteq X$. Pongamos

$$\gamma := \big\{A_1, \ldots, A_m\big\}.$$

Demostrar que

$$\cup\gamma = \bigcup_{k=1}^{m} A_k.$$

**3 Ejercicio** (la unión de una colección que consiste de un conjunto)**.** Sea $X$ un conjunto, sea $A \subseteq X$ y sea

$$\gamma := \big\{A\big\}.$$

Demostrar que

$$\cup\gamma = A.$$

**4 Ejercicio** (representar la unión de una colección de conjuntos como la unión de una familia idéntica de conjuntos)**.** Sea $X$ un conjunto y sea $\gamma \subseteq 2^X$. Definimos $f\colon \gamma \to 2^X$,

$$f(B) := B.$$

En otras palabras, $f$ es la familia idéntica cuyo conjunto de índices es $\gamma$. Demostrar que

$$\cup\gamma = \bigcup_{B\in\gamma} f(B).$$

En una notación más simple,

$$\cup\gamma = \bigcup_{B\in\gamma} B.$$

**5 Ejercicio** (representar la unión de una familia de conjuntos como la unión de una colección de conjuntos)**.** Sea $X$ un conjunto y sea $(f(k))_{k\in J}$ una familia de subconjuntos de $X$. Pongamos

$$\gamma \coloneqq f[J].$$

Demostrar que

$$\bigcup_{k\in J} f(k) = \cup\gamma.$$

**6 Ejercicio** (la propiedad creciente de la unión de colecciones de conjuntos)**.** Sea $X$ un conjunto y sean $\gamma_1, \gamma_2 \subseteq 2^X$ tales que $\gamma_1 \subseteq \gamma_2$. Demostrar que

$$\cup\gamma_1 \subseteq \cup\gamma_2.$$

**7 Ejercicio** (sobre la unión de la intersección de dos colecciones de conjuntos)**.** Demostrar o refutar la siguiente conjetura. Sea $X$ un conjunto y sean $\gamma_1, \gamma_2 \subseteq 2^X$. Entonces

$$\cup\,(\gamma_1 \cap \gamma_2) = (\cup\gamma_1) \cap (\cup\gamma_2).$$