Funciones uniformemente continuas
(un tema de la unidad “Espacios métricos”)

Egor Maximenko,

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

5 de septiembre de 2022

Objetivos

- Estudiar el concepto de funciones uniformemente continuas.
- Dar un criterio de la continuidad uniforme por medio del medidor de continuidad uniforme.

Objetivos

- Estudiar el concepto de funciones uniformemente continuas.
- Dar un criterio de la continuidad uniforme por medio del medidor de continuidad uniforme.

Aplicaciones (no se incluyen en esta presentación):

- numerosas aplicaciones en varias partes de análisis;
- extensión continua de funciones uniformemente continuas;
- completación de espacios métricos.

Prerrequisitos

- Espacios métricos y pseudométricos.
- Funciones continuas.
- El diámetro de un conjunto en un espacio métrico.

Funciones uniformemente continuas

En este tema suponemos que (X, d_X) y (Y, d_Y) son espacios métricos o pseudométricos.

Funciones uniformemente continuas

En este tema suponemos que (X, d_X) y (Y, d_Y) son espacios métricos o pseudométricos.

Definición

Sea $f\colon X \to Y$. Se dice que f es uniformemente continua si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall a \in X \quad \forall b \in X \quad \Big(d_X(a, b) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_Y(f(a), f(b)) < \varepsilon \Big).$$

Funciones uniformemente continuas

En este tema suponemos que (X, d_X) y (Y, d_Y) son espacios métricos o pseudométricos.

Definición

Sea $f\colon X \to Y$. Se dice que f es uniformemente continua si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall a \in X \quad \forall b \in X \quad \Big(d_X(a, b) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_Y(f(a), f(b)) < \varepsilon\Big).$$

$$C_u(X, Y) := \{f \in Y^X\colon\ f \text{ es uniformemente continua}\}.$$

Las funciones uniformemente continuas son continuas

$f\colon X \to Y$ es continua en cada punto del dominio si, y solo si,

$$\forall a \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall b \in X \quad \Big(d_X(a, b) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_Y(f(a), f(b)) < \varepsilon \Big).$$

Las funciones uniformemente continuas son continuas

$f\colon X \to Y$ es continua en cada punto del dominio si, y solo si,

$$\forall a \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall b \in X \quad \Big(d_X(a, b) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_Y(f(a), f(b)) < \varepsilon \Big).$$

$f\colon X \to Y$ es uniformemente continua, si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall a \in X \quad \forall b \in X \quad \Big(d_X(a, b) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_Y(f(a), f(b)) < \varepsilon \Big).$$

Las funciones uniformemente continuas son continuas

$f\colon X \to Y$ es continua en cada punto del dominio si, y solo si,

$$\forall a \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall b \in X \quad \Big(d_X(a, b) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_Y(f(a), f(b)) < \varepsilon \Big).$$

$f\colon X \to Y$ es uniformemente continua, si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall a \in X \quad \forall b \in X \quad \Big(d_X(a, b) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_Y(f(a), f(b)) < \varepsilon \Big).$$

Ejercicio.

Mostrar que $C_u(X, Y) \subseteq C(X, Y)$.

El medidor de continuidad uniforme de una función

Definición

Sea $f\colon X \to Y$. Definimos $\omega_f\colon (0,+\infty) \to [0,+\infty]$,

$$\omega_f(\eta) := \sup\left\{ d_Y(f(a), f(b))\colon\ \ a, b \in X,\ \ d_X(a,b) \le \eta \right\}.$$

El medidor de continuidad uniforme de una función

Definición

Sea $f\colon X \to Y$. Definimos $\omega_f\colon (0, +\infty) \to [0, +\infty]$,

$$\omega_f(\eta) := \sup \left\{ d_Y(f(a), f(b))\colon \ a, b \in X,\ d_X(a, b) \le \eta \right\}.$$

Muchos autores utilizan el término "módulo de continuidad uniforme".

El módulo de continuidad en términos del η-entorno no estricto

Pongamos

$$E_{X,\eta} := \{(a,b) \in X^2 \colon \ d(a,b) \le \eta\}.$$

El módulo de continuidad en términos del η-entorno no estricto

Pongamos

$$E_{X,\eta} := \{(a,b) \in X^2 \colon\ d(a,b) \le \eta\}.$$

Definimos $f \otimes f \colon X^2 \to Y^2$,

$$(f \otimes f)(a,b) := (f(a), f(b)).$$

El módulo de continuidad en términos del η-entorno no estricto

Pongamos

$$E_{X,\eta} := \{(a,b) \in X^2 \colon\ d(a,b) \le \eta\}.$$

Definimos $f \otimes f \colon X^2 \to Y^2$,

$$(f \otimes f)(a,b) := (f(a), f(b)).$$

Ejercicio. Mostrar que

$$\omega_f(\eta) = \sup(d[(f \otimes f)[E_{X,\eta}]]).$$

Cota superior para $d(f(a), f(b))$ en términos de ω_f

Proposición

Sea $f\colon X \to Y$ y sean $a, b \in X$. Entonces

$$d_Y(f(a), f(b)) \leq \omega_f(d_X(a, b)).$$

Cota superior para $d(f(a), f(b))$ en términos de ω_f

Proposición

Sea $f\colon X \to Y$ y sean $a, b \in X$. Entonces

$$d_Y(f(a), f(b)) \leq \omega_f(d_X(a, b)).$$

Demostración. Sea $\eta = d_X(a, b)$. Entonces $(a, b) \in \{(s, t) \in X^2 \colon\ d_X(s, t) \leq \eta\}$.

Cota superior para $d(f(a), f(b))$ en términos de ω_f

Proposición

Sea $f\colon X \to Y$ y sean $a, b \in X$. Entonces

$$d_Y(f(a), f(b)) \le \omega_f(d_X(a, b)).$$

Demostración. Sea $\eta = d_X(a, b)$. Entonces $(a, b) \in \{(s, t) \in X^2 \colon\ d_X(s, t) \le \eta\}$. Por eso

$$d_Y(f(a), f(b)) \in \underbrace{\{d_Y(f(s), f(t)) \colon\ s, t \in X,\ d_X(s, t) \le \eta\}}_{G}.$$

Cota superior para $d(f(a), f(b))$ en términos de ω_f

Proposición

Sea $f\colon X \to Y$ y sean $a, b \in X$. Entonces

$$d_Y(f(a), f(b)) \le \omega_f(d_X(a, b)).$$

Demostración. Sea $\eta = d_X(a, b)$. Entonces $(a, b) \in \{(s, t) \in X^2\colon\ d_X(s, t) \le \eta\}$. Por eso

$$d_Y(f(a), f(b)) \in \underbrace{\{d_Y(f(s), f(t))\colon\ s, t \in X,\ d_X(s, t) \le \eta\}}_{G}.$$

Finalmente, recordamos que $\omega_f(\eta) = \sup(G)$.

El medidor de continuidad uniforme es una función creciente

Proposición

Sea $f: X \to Y$ y sean $\eta_1, \eta_2 > 0$ tales que $\eta_1 < \eta_2$. Entonces $\omega_f(\eta_1) \leq \omega_f(\eta_2)$.

El medidor de continuidad uniforme es una función creciente

Proposición

Sea $f\colon X \to Y$ y sean $\eta_1, \eta_2 > 0$ tales que $\eta_1 < \eta_2$. Entonces $\omega_f(\eta_1) \le \omega_f(\eta_2)$.

Demostración. Si $d_X(a,b) \le \eta_1$, entonces $d_X(a,b) \le \eta_2$.

El medidor de continuidad uniforme es una función creciente

Proposición

Sea $f\colon X \to Y$ y sean $\eta_1, \eta_2 > 0$ tales que $\eta_1 < \eta_2$. Entonces $\omega_f(\eta_1) \le \omega_f(\eta_2)$.

Demostración. Si $d_X(a,b) \le \eta_1$, entonces $d_X(a,b) \le \eta_2$. Por eso

$$\underbrace{\{d_Y(f(a), f(b))\colon\ a, b \in X,\ \ d_X(a,b) \le \eta_1\}}_{G} \subseteq \underbrace{\{d_Y(f(a), f(b))\colon\ a, b \in X,\ \ d_X(a,b) \le \eta_1\}}_{H}.$$

El medidor de continuidad uniforme es una función creciente

Proposición

Sea $f\colon X \to Y$ y sean $\eta_1, \eta_2 > 0$ tales que $\eta_1 < \eta_2$. Entonces $\omega_f(\eta_1) \le \omega_f(\eta_2)$.

Demostración. Si $d_X(a,b) \le \eta_1$, entonces $d_X(a,b) \le \eta_2$. Por eso

$$\underbrace{\{d_Y(f(a),f(b))\colon\ a,b\in X,\ \ d_X(a,b)\le\eta_1\}}_{G} \subseteq \underbrace{\{d_Y(f(a),f(b))\colon\ a,b\in X,\ \ d_X(a,b)\le\eta_1\}}_{H}.$$

Luego $\quad \omega_f(\eta_1) = \sup(G) \le \sup(H) = \omega_f(\eta_2).$

Criterio de continuidad uniforme en términos del medidor de continuidad uniforme

Proposición

Sea $f\colon X \to Y$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es uniformemente continua;

(b) para cada $\varepsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que $\omega_f(\eta) \le \varepsilon$;

(c) $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega_f(\delta) = 0$.

(d) $\inf\limits_{\delta > 0} \omega_f(\delta) = 0$.

Criterio de continuidad uniforme en términos del medidor de continuidad uniforme

Proposición

Sea $f\colon X \to Y$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es uniformemente continua;

(b) para cada $\varepsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que $\omega_f(\eta) \le \varepsilon$;

(c) $\lim\limits_{\delta\to 0} \omega_f(\delta) = 0$.

(d) $\inf\limits_{\delta>0} \omega_f(\delta) = 0$.

La condición (b) involucra solamente 2 cuantificadores y muestra la utilidad de ω_f.

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que $f \in C_u(X, Y)$.

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que $f \in C_u(X, Y)$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos $\delta > 0$ tal que

$$\forall a, b \in X \qquad \Big(d_X(a, b) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_Y(f(a), f(b)) < \varepsilon \Big).$$

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que $f \in C_u(X, Y)$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos $\delta > 0$ tal que

$$\forall a, b \in X \qquad \Big(d_X(a, b) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_Y(f(a), f(b)) < \varepsilon \Big).$$

Pongamos $\eta := \delta/2$.

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que $f \in C_u(X, Y)$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos $\delta > 0$ tal que

$$\forall a, b \in X \qquad \Big(d_X(a, b) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_Y(f(a), f(b)) < \varepsilon \Big).$$

Pongamos $\eta := \delta/2$.

Notamos que si $a, b \in X$ y $d_X(a, b) \le \eta$, entonces $d_X(a, b) < \delta$ y por eso $d_Y(f(a), f(b)) < \varepsilon$.

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que $f \in C_u(X, Y)$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos $\delta > 0$ tal que

$$\forall a, b \in X \qquad \Big(d_X(a, b) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_Y(f(a), f(b)) < \varepsilon\Big).$$

Pongamos $\eta := \delta/2$.

Notamos que si $a, b \in X$ y $d_X(a, b) \leq \eta$, entonces $d_X(a, b) < \delta$ y por eso $d_Y(f(a), f(b)) < \varepsilon$.

Luego $\omega_f(\eta) \leq \varepsilon$.

Ejercicio. Completar la demostración.

Ejercicio

Sea $f\colon [-5,5] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := x^2.$$

Calcular ω_f y determinar si f es uniformemente continua.

Ejercicio

Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2.$$

Calcular ω_f y determinar si f es uniformemente continua.

Ejercicio

Sea $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 1/x.$$

Calcular ω_f y determinar si f es uniformemente continua.

Las funciones uniformemente continuas convierten sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy

Proposición

Sea $f \in C_u(X, Y)$ y sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X.
Entonces $f \circ x$ es una sucesión de Cauchy en Y.

Las funciones uniformemente continuas convierten sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy

Proposición

Sea $f \in C_u(X, Y)$ y sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X.
Entonces $f \circ x$ es una sucesión de Cauchy en Y.

Demostración: ejercicio. Se recomienda acotar $\gamma_{f\circ x}$ en términos de ω_f y γ_x.

Las funciones uniformemente continuas convierten sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy

Proposición

Sea $f \in C_u(X, Y)$ y sea $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X.
Entonces $f \circ x$ es una sucesión de Cauchy en Y.

Demostración: ejercicio. Se recomienda acotar $\gamma_{f \circ x}$ en términos de ω_f y γ_x.

Problema. Determinar si es cierta la afirmación recíproca:
si f convierte sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy, entonces $f \in C_u(X, Y)$.